

# Clase Anterior



□ Transformaciones 2D y 3D

# Traslación 2D



Las ecuaciones de traslación pasan a ser una matriz 3x3 en coordenadas homogéneas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esta ecuación puede ser representada de la siguiente forma:

$$P' = T(d_x, d_y) \cdot P,$$

Donde

$$T(d_x, d_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Escalamiento 2D



El escalamiento se hace con un factor  $s_x$  en el eje  $x$  y en un factor  $s_y$  en el eje  $y$ .

Escalamiento uniforme  $s_x = s_y$

Escalamiento diferencial.

La transformación de escalamiento puede expresarse con las siguientes multiplicaciones

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Rotación 2D



Similarmente, las ecuaciones de rotación pueden ser representadas como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Traslación 3D



La matriz de traslación tridimensional es una simple extensión de la bidimensional:

$$T(Dx, Dy, Dz) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & Dx \\ 0 & 1 & 0 & Dy \\ 0 & 0 & 1 & Dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

# Escalamiento 3D



La matriz de escalamiento es similarmente extendida:

$$S(Sx, Sy, Sz) = \begin{vmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

# Rotación 3D



La rotación bidimensional es justo una rotación con respecto al eje z. En tres dimensiones:

$$R_z(\theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$R_x(\theta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

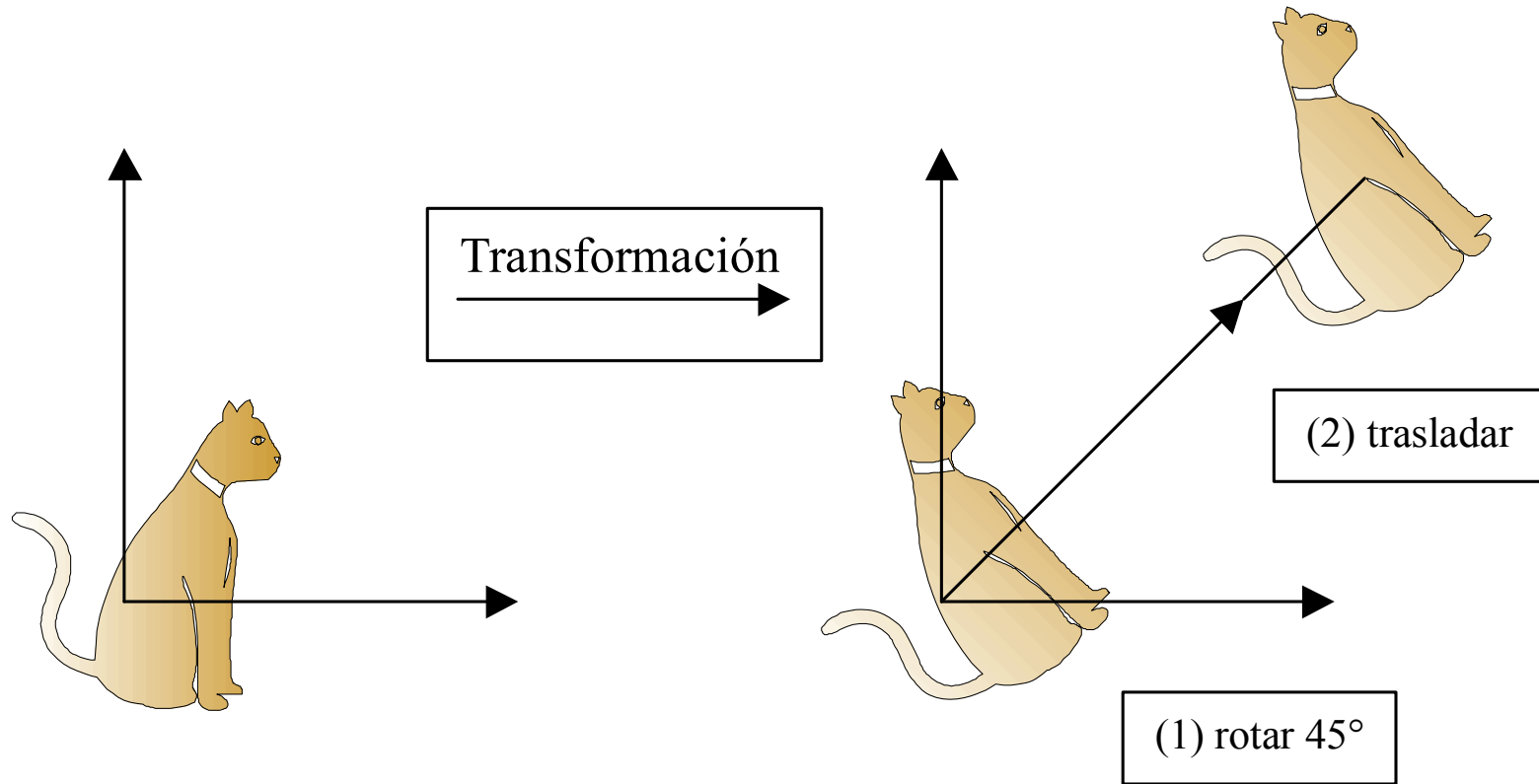
$$R_y(\theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



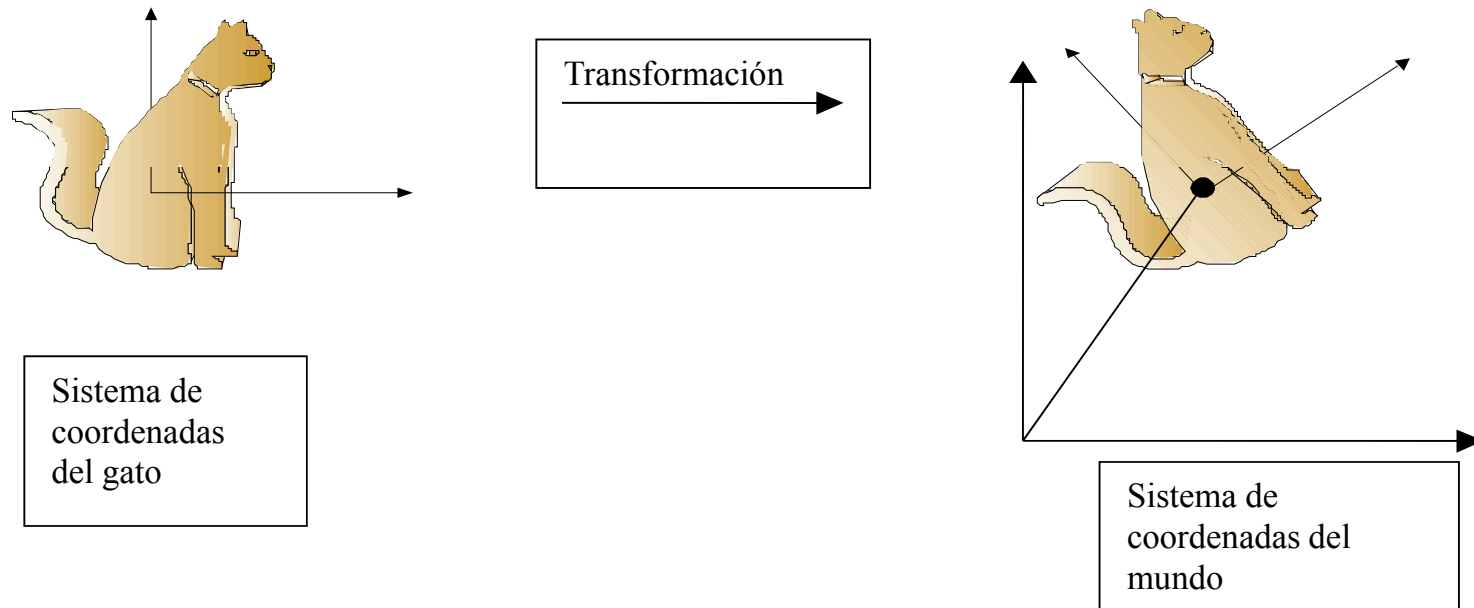
Haciendo la composición de una secuencia arbitraria de rotaciones con respecto a los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , se creará una matriz  $A$  de la forma:

$$M = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

# Cambio en el sistema de coordenadas



# Cambio en el sistema de coordenadas





## Capítulo 7

### Gráficos por computadora con OpenGL

*Donald Hearn & Pauline Baker*

## Capítulo 6

### Computer Graphics Introduction *(Foley , Van Dam, Feiner, Hughes, Phillips)*

## Capítulo 5

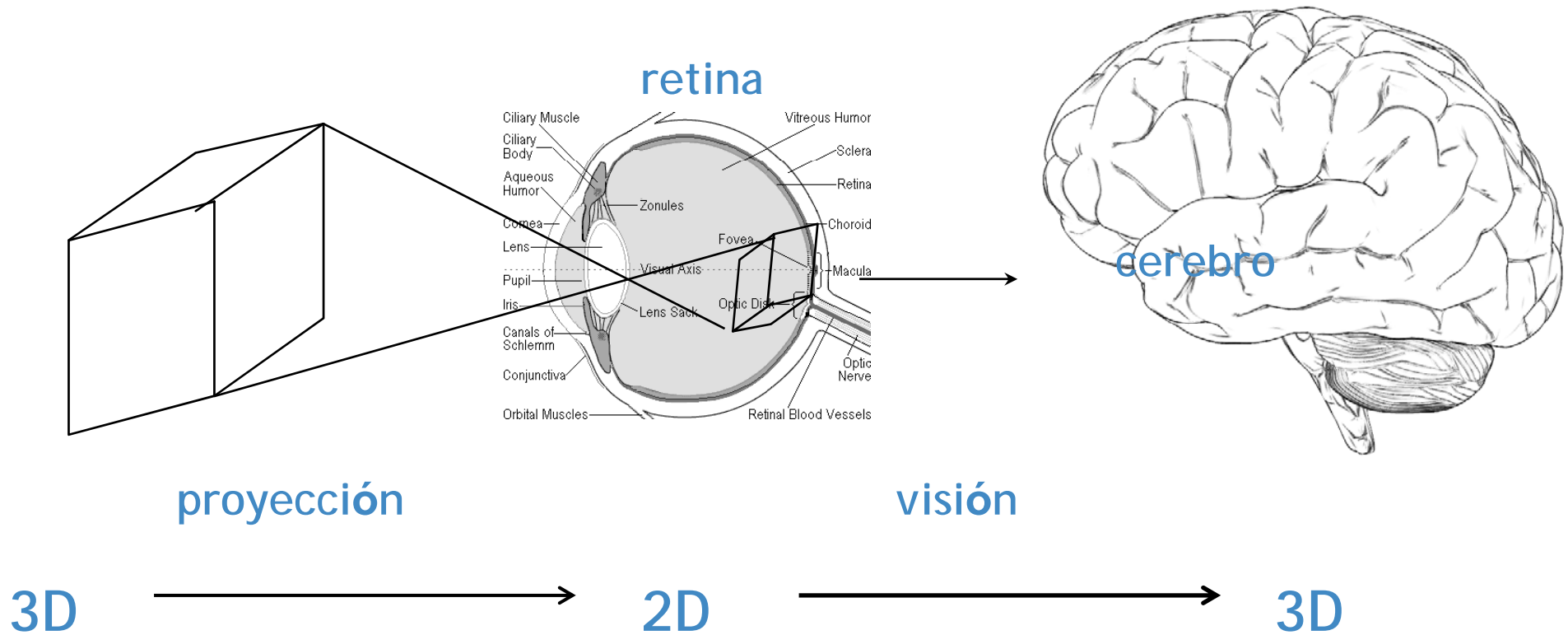
### Interactive Computer Graphics with OpenGL

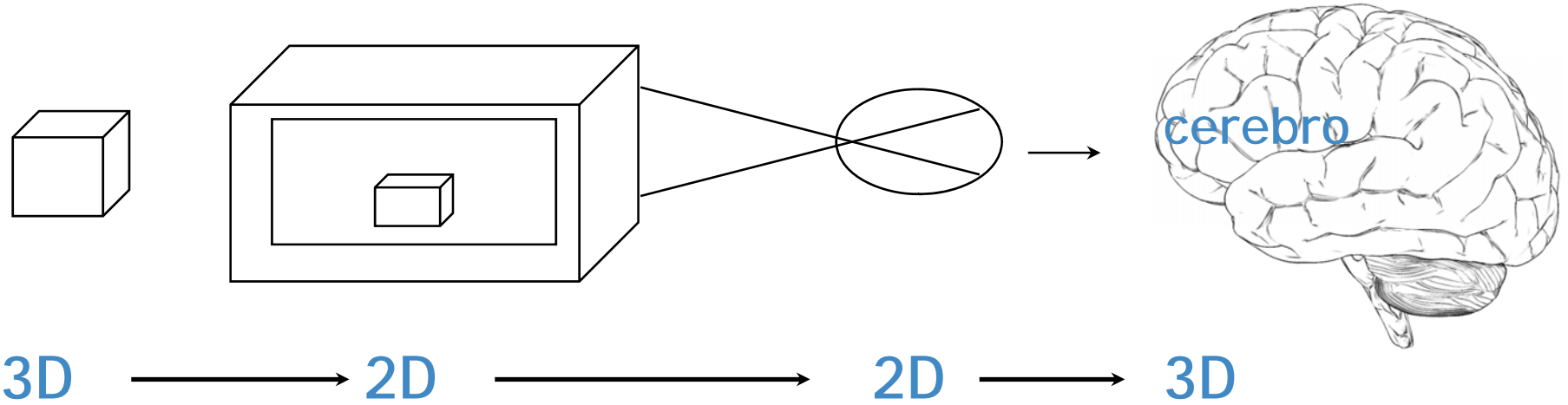
*Eduard Angel*

# Sistema Visual humano



Proceso de visualización del ser humano



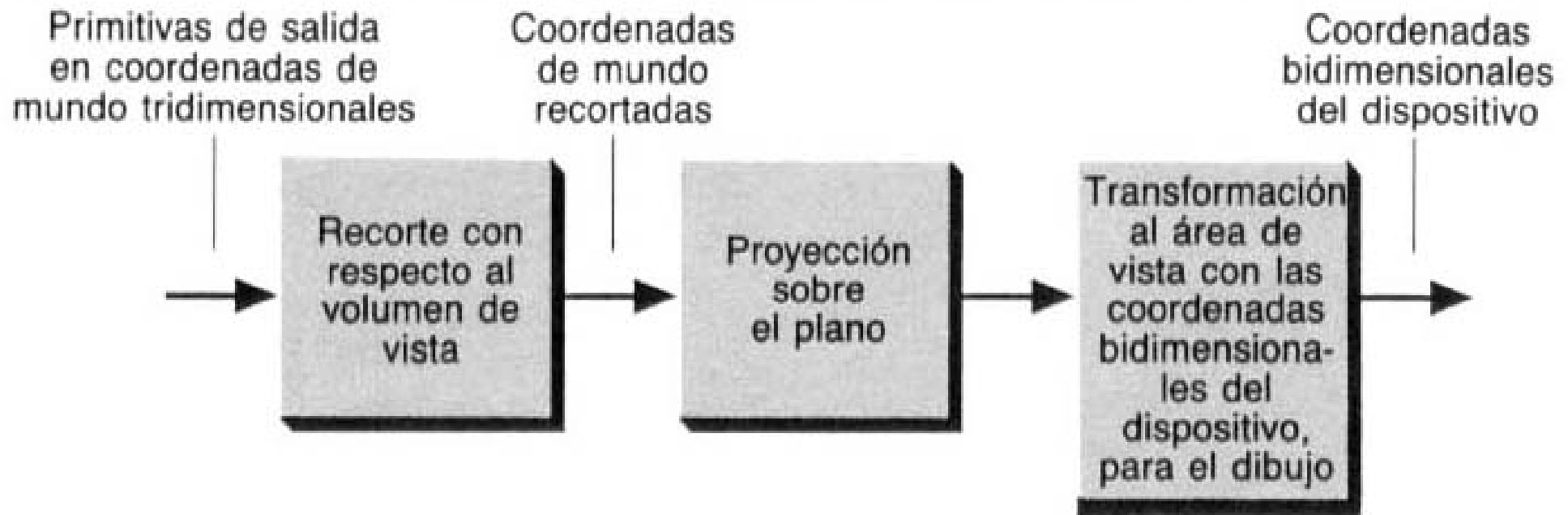


Vista tridimensional  
en computación gráfica



Nos centraremos en esta parte

# Modelo conceptual



# Proyecciones

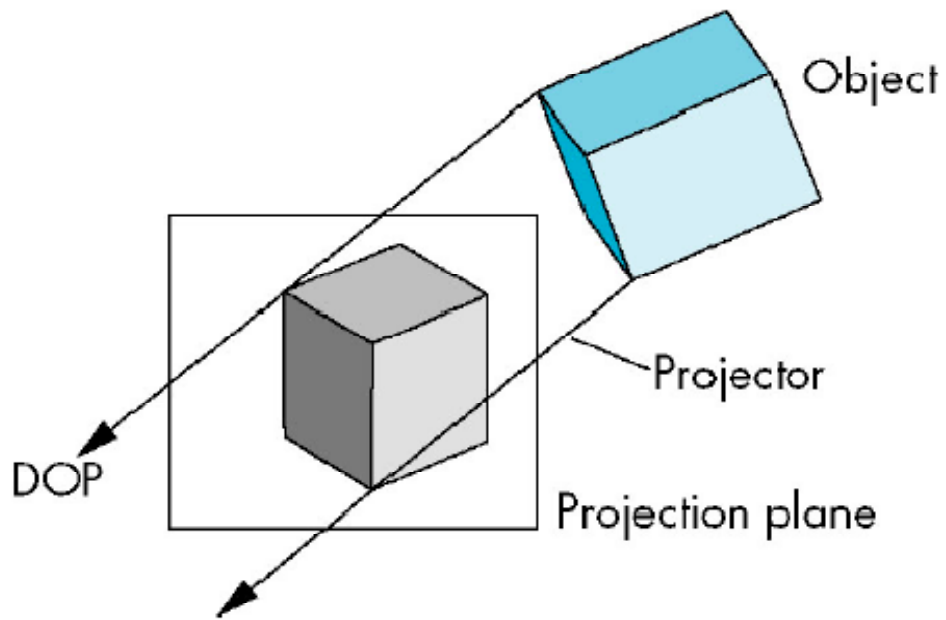


- Una proyección es una transformación matemática que convierte puntos representado en  $n$  dimensiones en puntos representados en  $n - i$  dimensiones
- La proyección de un objeto tridimensional se define por unas líneas de proyección (proyectores) que comienzan en el centro de proyección, pasando a través de los puntos del objeto e interceptando el plano de proyección formando así la proyección.
- Se dividen en proyecciones paralelas y de perspectiva.
- La diferencia entre ambas surge de la relación entre el centro y el plano de proyección.

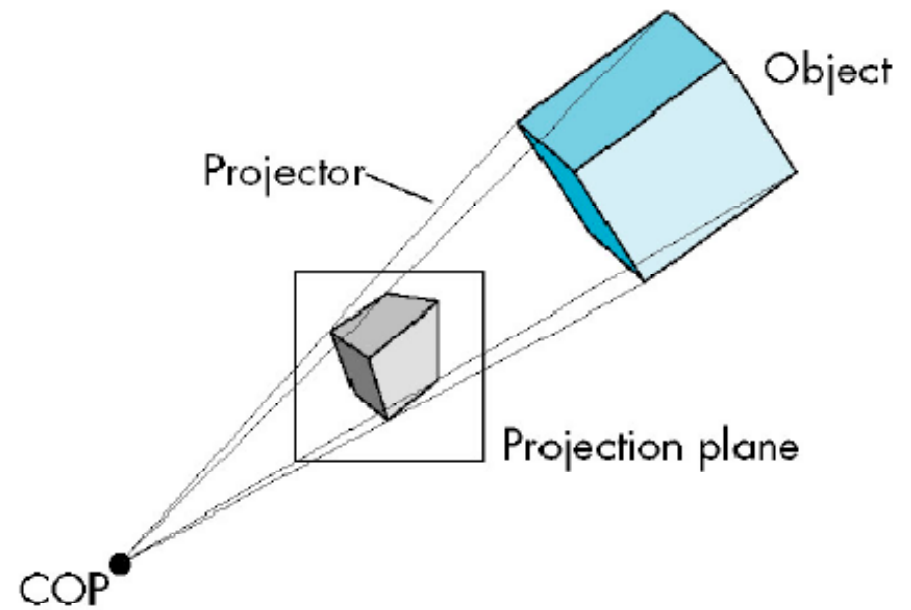
# Tipos de Proyección



## Paralela

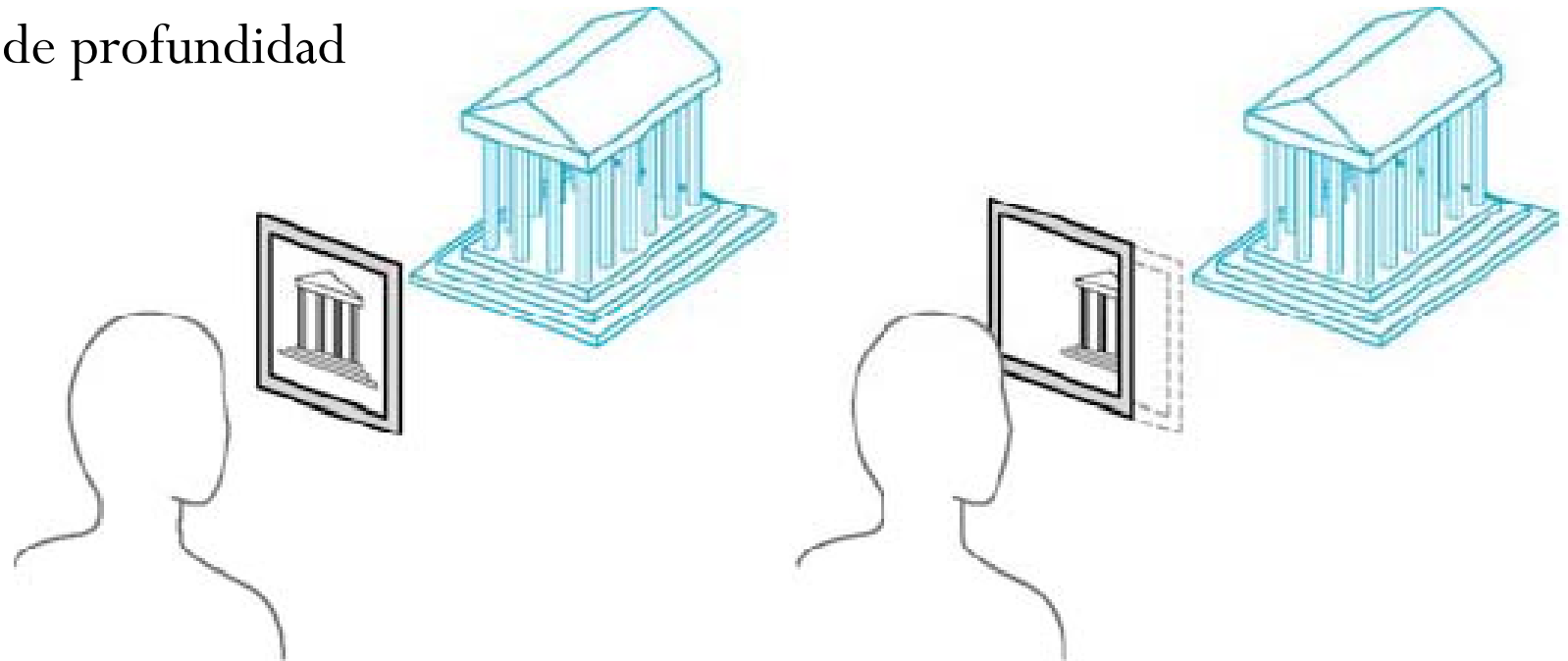


## Perspectiva





- ❑ **Recortar la escena** con respecto al volumen de visión
  - ❑ Usualmente finito para evitar objetos extraños
- ❑ **Proyectar la escena** sobre un plano de proyección
  - ❑ Similar al modelo de la cámara
  - ❑ Enfocar el volumen de visión
  - ❑ Efectos de profundidad





- ❑ Dada la geometría de proyección
  - ❑ Se proyecta la escena en una superficie plana, plano de proyección
  
- ❑ Rayos de proyección o proyectores
  - ❑ Líneas que van desde un punto en la escena hasta el centro de proyección
  - ❑ La intersección entre proyectores y el plano de proyección forman la vista



□ Proyección en perspectiva:

□ Punto finito:  $(x, y, z, 1)$

□ Proyección en paralelo

□ Dirección de proyección

$$(x, y, z, 1) - (x', y', z', 1) = (a, b, c, 0)$$

# Proyección en perspectiva vs paralela



- Proyección en perspectiva
  - Realística al sistema visual humano
  - El tamaño del objeto varia segun la distancia del objeto al centro de proyección
  - No se presenrvan las distancias y ángulos
- Proyección paralela
  - Menos realistica
  - El tamaño del objeto no varia con respecto a la distancia del objeto al centro de proyección
  - Se preservan las líneas paralelas

# Proyección en perspectiva



## **Punto de fuga:**

Cualquier conjunto de líneas paralelas convergen a un punto de fuga.

El punto de fuga existe para cada diferente dirección excepto para las direcciones paralelas al plano de proyección

## **Punto de fuga de eje:**

Punto de fuga en la dirección de uno de los ejes principales.

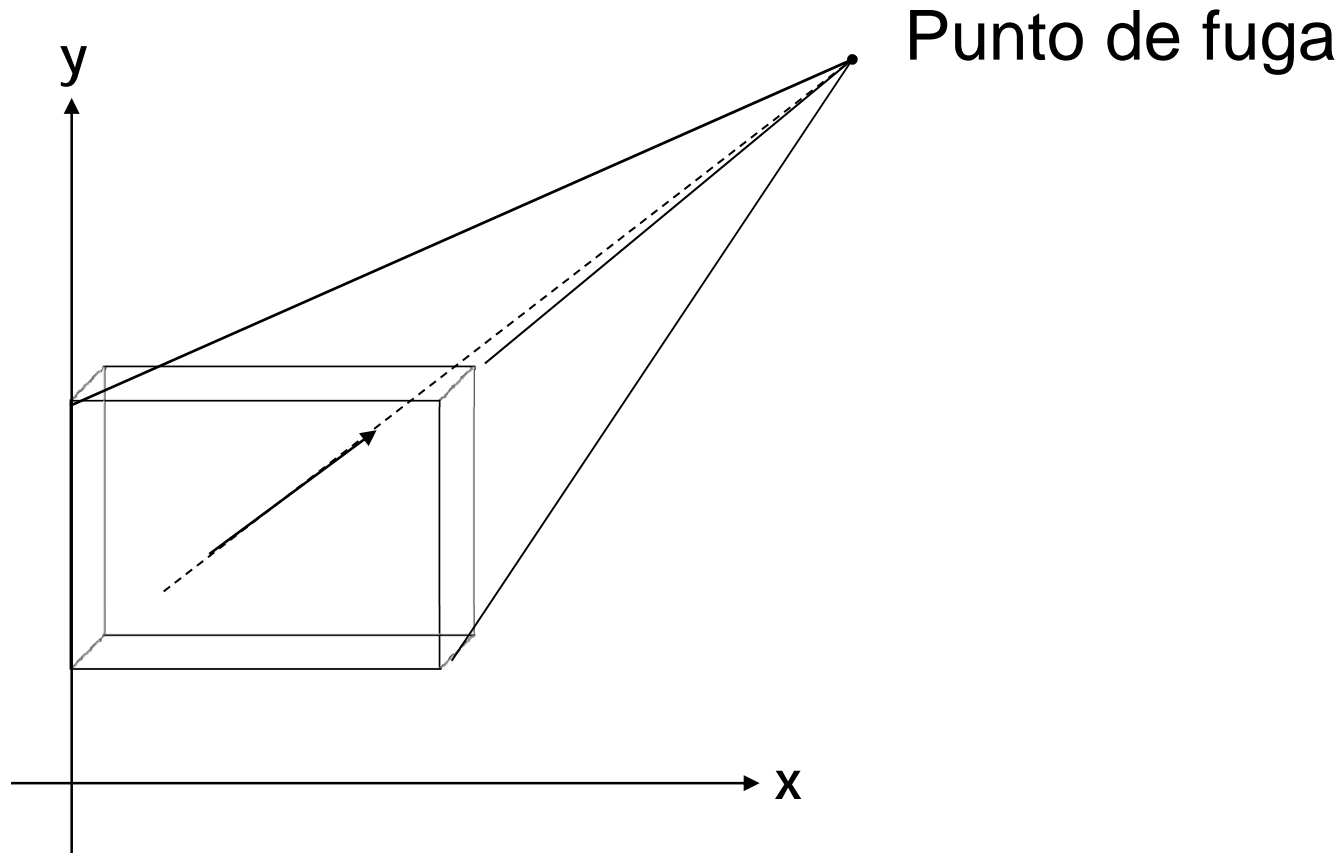
$$1 \leq \#(\text{puntos de fuga de eje}) \leq 3$$

perspectiva de un punto de fuga

perspectiva de dos puntos de fuga

perspectiva de tres puntos de fuga

# Proyección en perspectiva



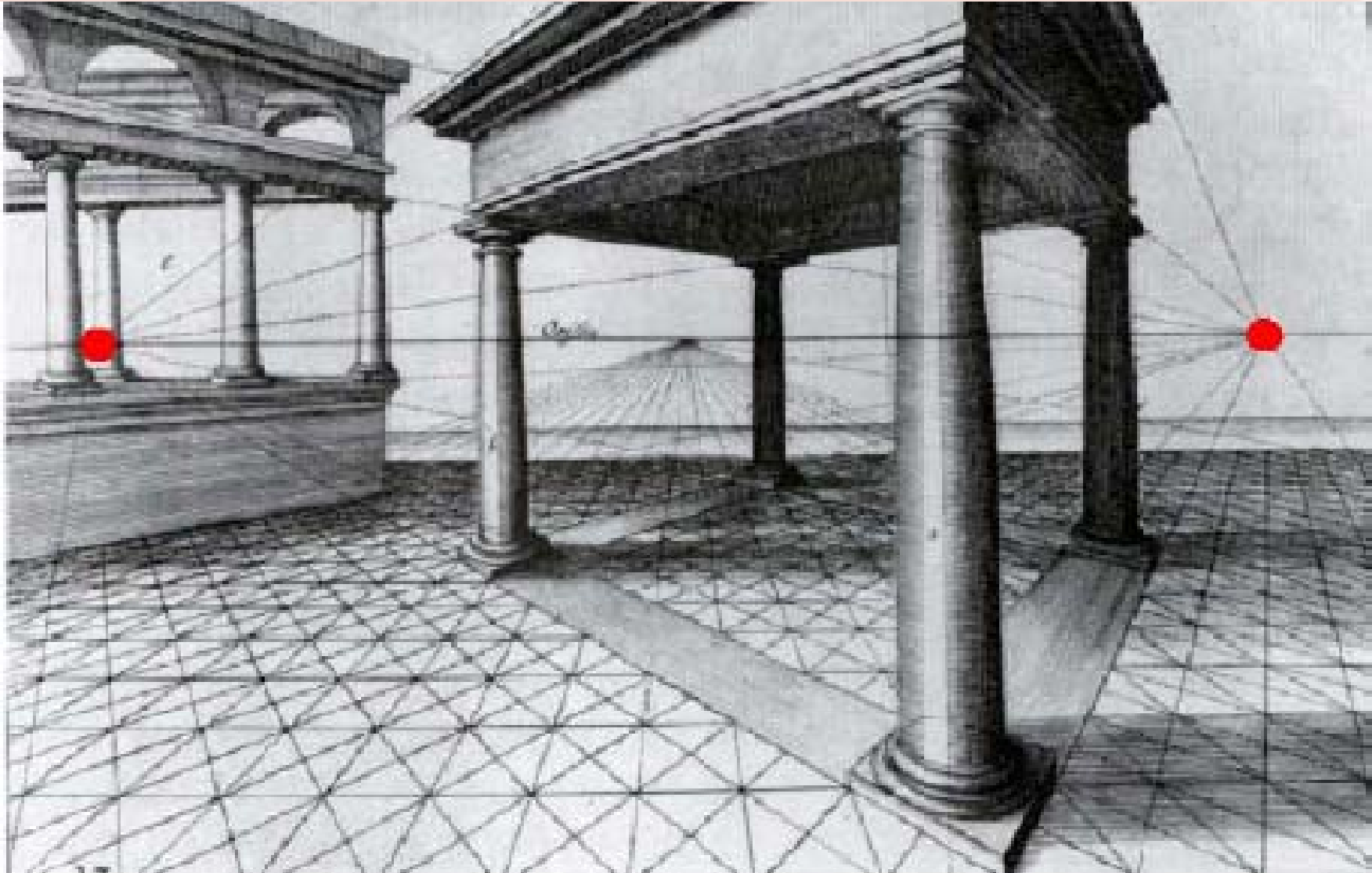
Proyección Perspectiva de un cubo en un plano, cortando el eje z con el punto de fuga de las líneas perpendiculares al plano de proyección



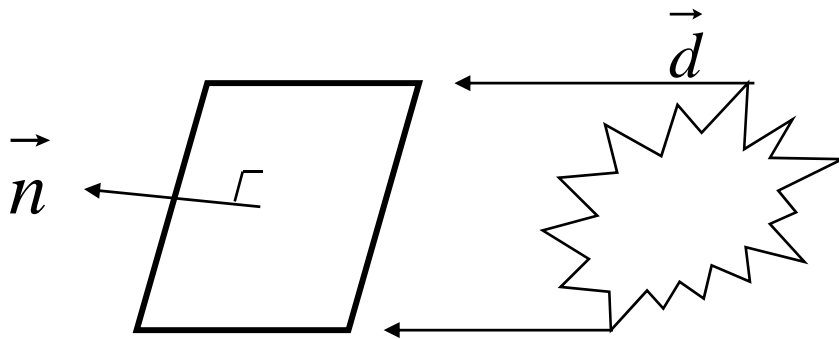
- Uno, dos o tres puntos de fuga



# Perspectiva con dos Puntos de fuga



# Proyecciones Paralelas



Vector normal del plano de proyección

$\vec{d}$  Dirección de proyección

Proyección ortográfica

$\vec{n} \parallel \vec{d}$

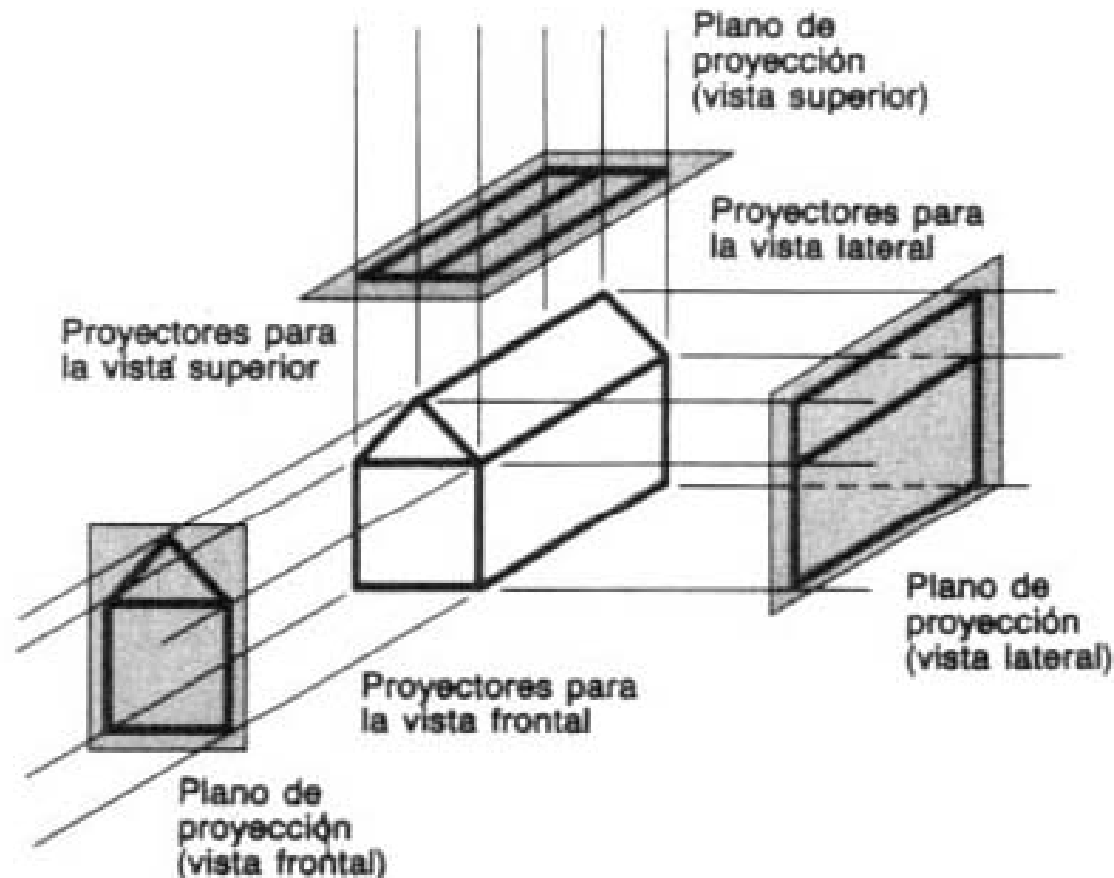
Proyección oblicua

$\vec{n} \not\parallel \vec{d}$

# Proyección Ortográfica



- ❑ Eje principal paralelo al plano de proyección
- ❑ Vista frontal, lateral o desde arriba





□ Proyección ortográfica

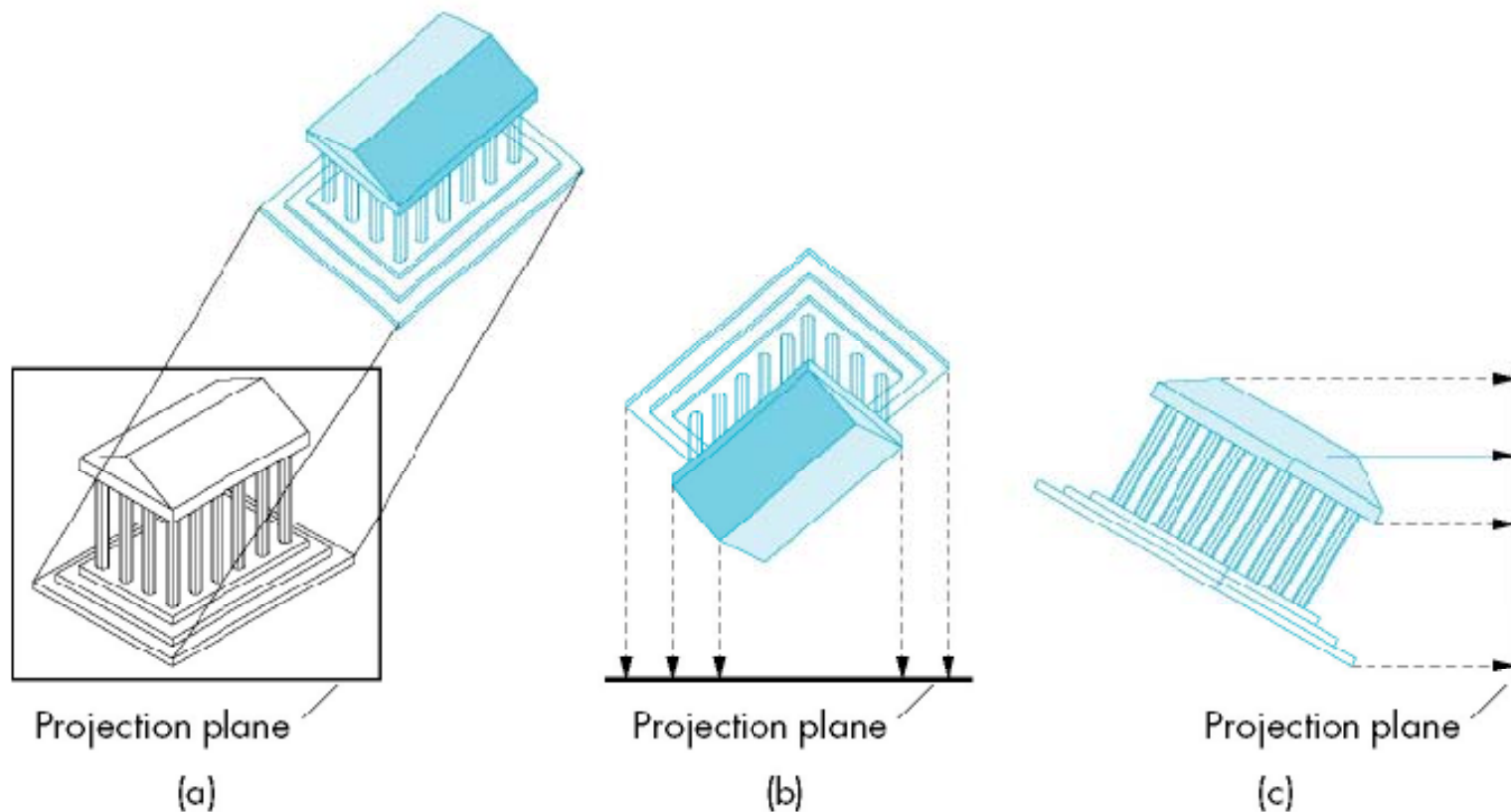
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Proyecciones Paralelas



## □ Axonométrica

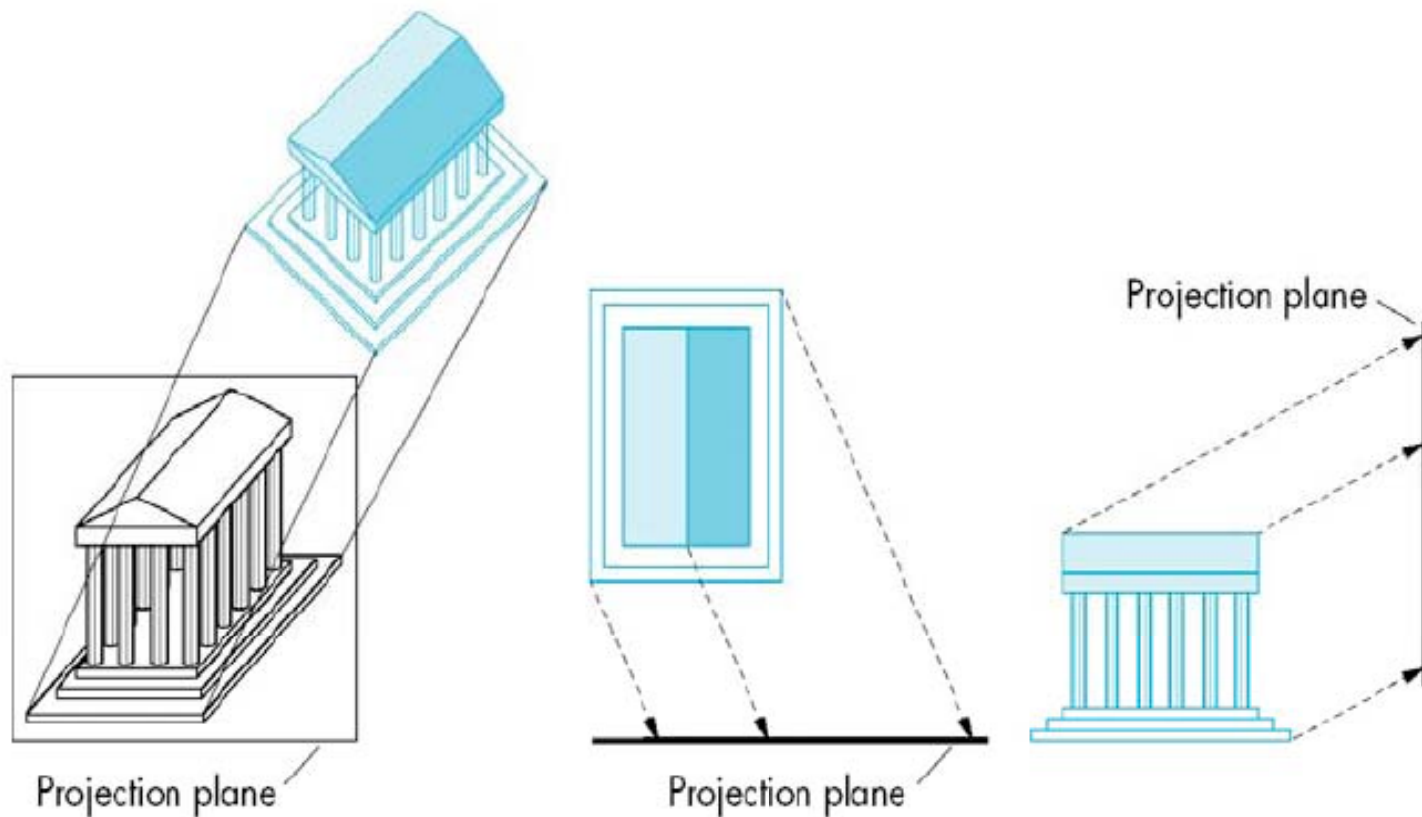
- Plano de proyección no es perpendicular a ningun eje principal del objeto



# Proyección Oblicua



- ❑ Líneas de proyección no son normal al plano de proyección



# Representación matricial



## □ Proyección oblicua

- $\alpha$ , ángulo entre el proyector y el plano de proyección
- $\phi$ , ángulo en el plano de proyección

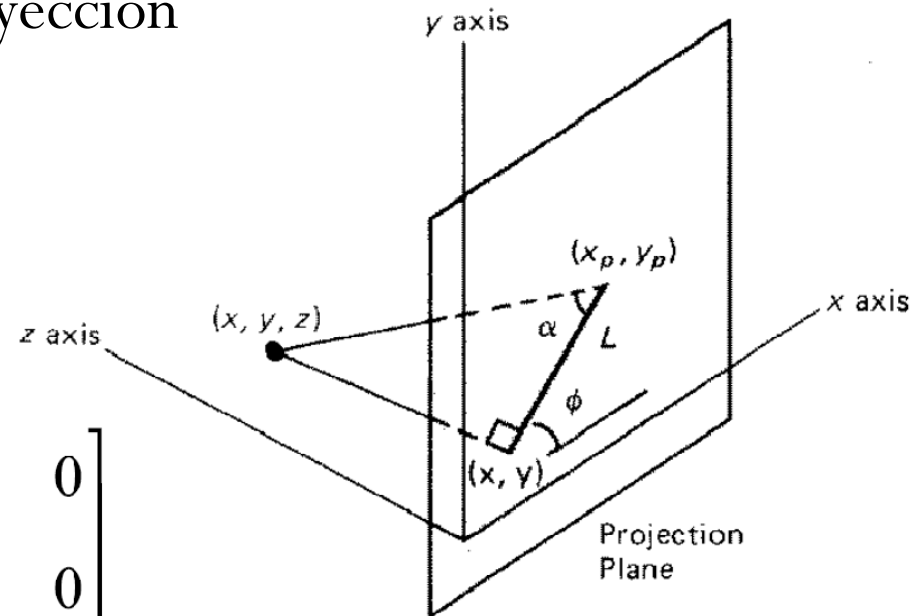
## □ Matriz de proyección

$$x_p = x + L \cos \phi$$

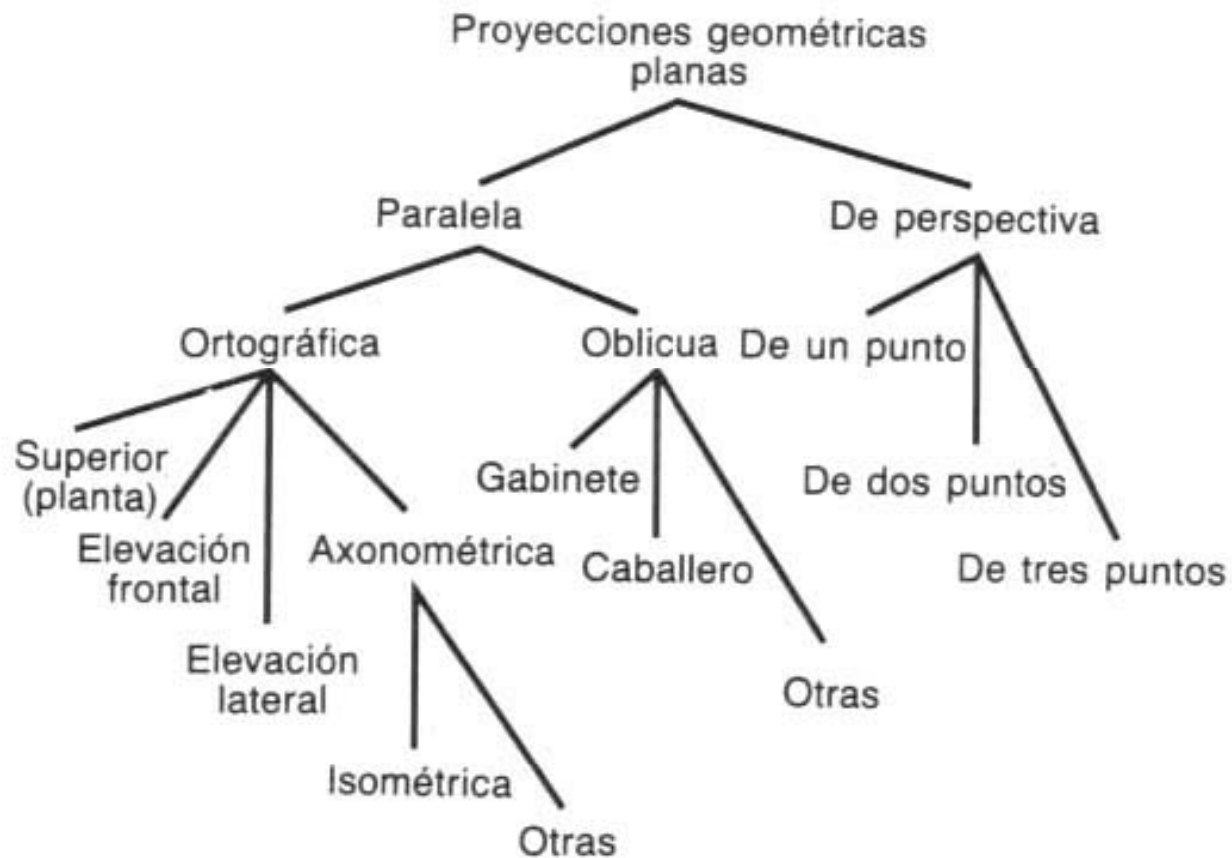
$$y_p = y + L \sin \phi$$

$$L = \frac{z}{\tan \alpha}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\cos \phi}{\tan \alpha} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sin \phi}{\tan \alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

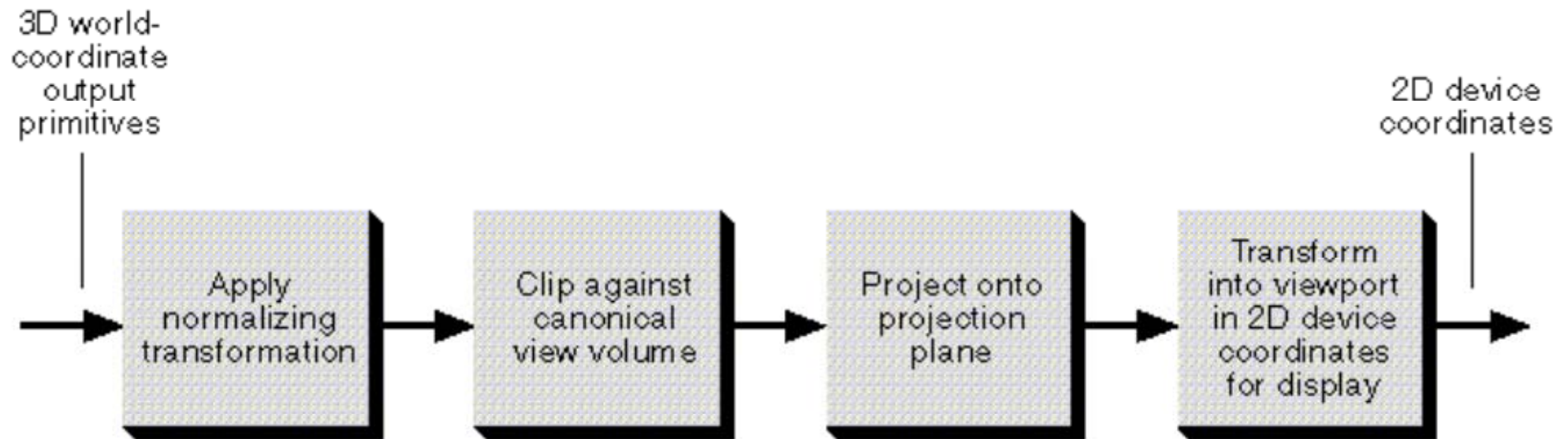


# Subclases de las proyecciones planas



Subclases de las proyecciones geométricas planas. La **vista de planta** es otro término para la vista superior. Las vistas **frontal** y **lateral** muchas veces se emplean sin el término **elevación**.

# Proceso de Visualización





wc: world coords.

vrc: view reference coords

VRP(wc): punto de referencia de vista

VPN(wc): normal al plano de vista

VRC(Viewing Reference Coordinate system)

O: VRP

n: VPN

v: Proyección de VUP

u:  $v \times n$

$$[v_{\min}, v_{\max}] (vc)$$

$$[u_{\min}, u_{\max}] (vc)$$

PRP(vc) (Projection reference Point) en Proyección Perspectiva.  
= centro de proyección

DOP(Direction of Projection) en Proyección Paralela.

$$CW \text{ (Center of Window)} = \left( \frac{u_{\min} + u_{\max}}{2}, \frac{v_{\min} + v_{\max}}{2} \right)$$

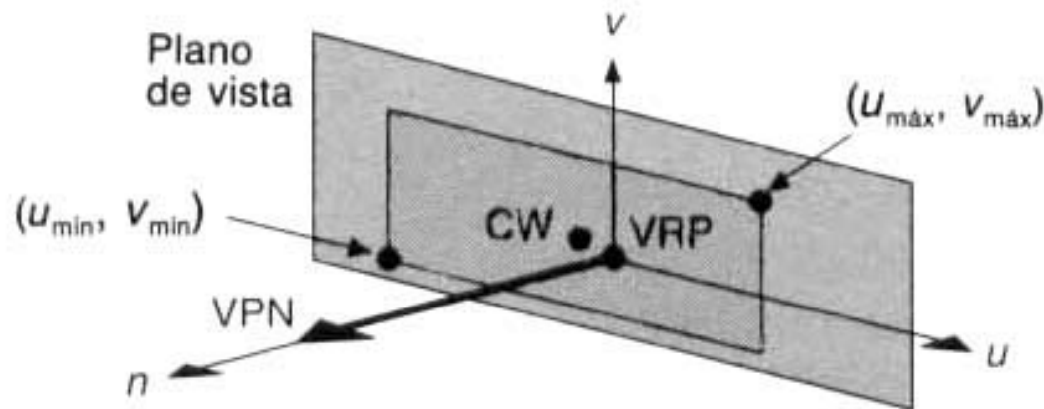




Una vez definido el sistema VRC, es posible determinar las coordenadas  $u$  y  $v$  máximas y mínimas de la ventana, como se muestra en la figura siguiente .

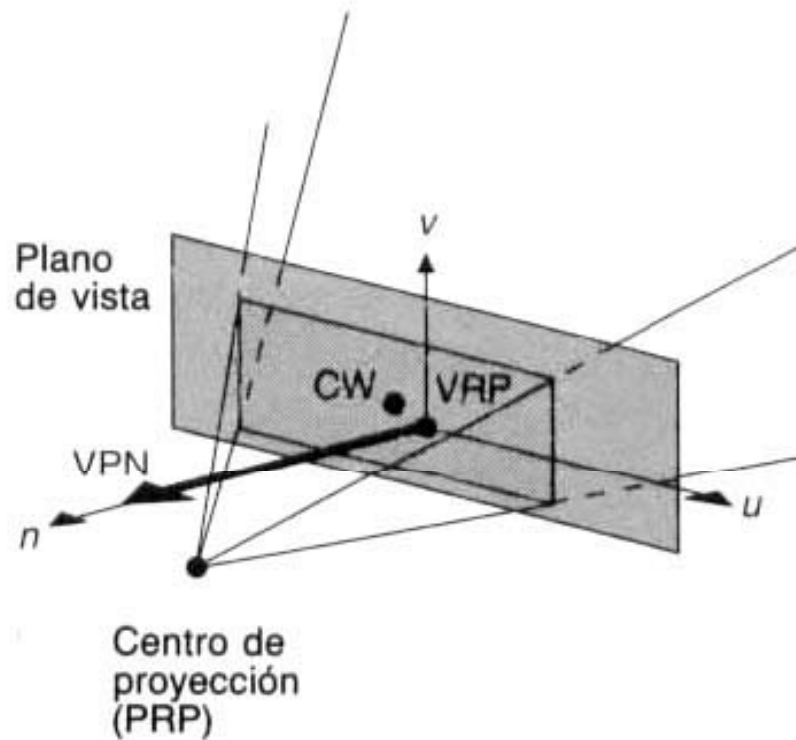
Se observa que la ventana no tiene que ser simétrica respecto al VRP.

También se observa explícitamente el centro de la ventana, CW.



El sistema de coordenadas de referencia de visualización (VRC) es un sistema de mano derecha formado por los ejes  $u$ ,  $v$  y  $n$ . El eje  $n$  siempre es VPN. CW es el centro de la ventana.

# Normalización (proyección en perspectiva)



Volumen de vista de pirámide semiinfinita para la proyección de perspectiva. CW es el centro de la ventana.

# Normalización (proyección paralela)



El centro de proyección y la dirección de la proyección (DOP) se definen con un punto de referencia de proyección (PRP) y un indicador del tipo de proyección.

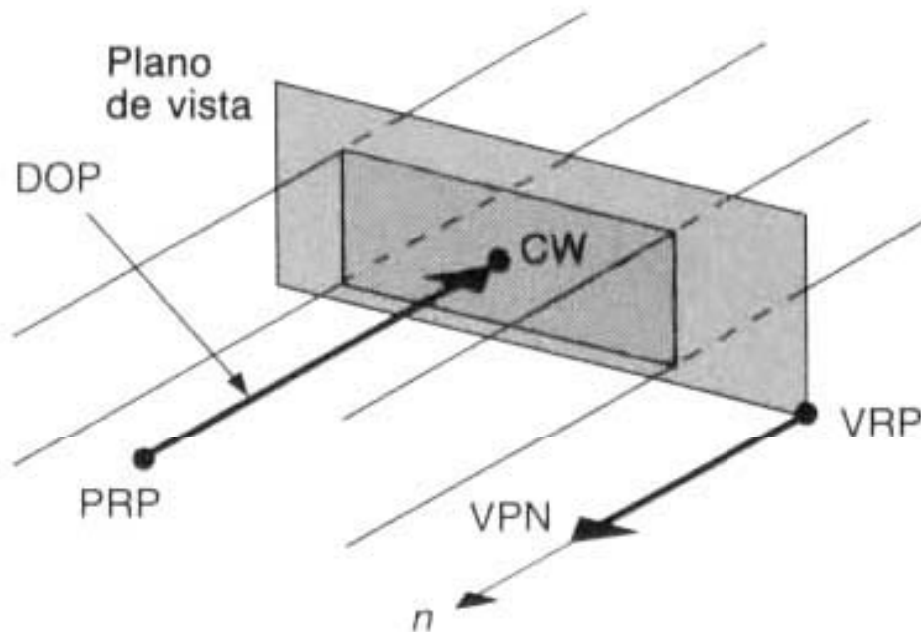
Perspectiva, PRP es el centro de proyección.

Paralela, la dirección de proyección es de PRP a CW.

El centro de la ventana generalmente es distinto del VRP, el cual ni siquiera tiene que estar dentro de los límites de la ventana.

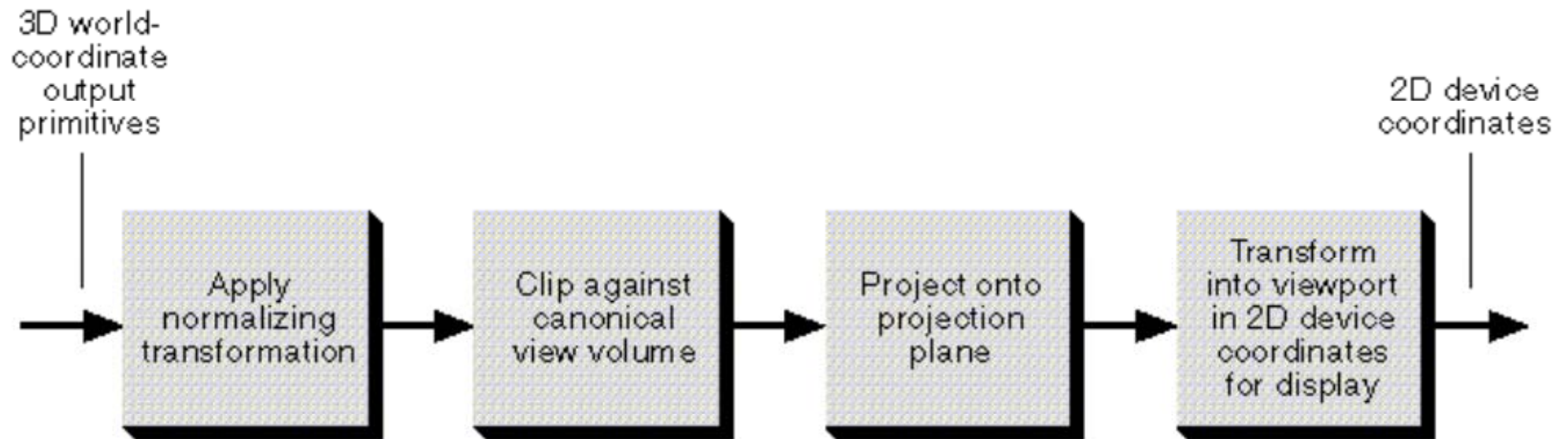
**IMPORTANTE:** El PRP se especifica en el sistema VRC, no en el sistema de coordenadas de mundo, es decir la posición del PRP con respecto al VRP no cambia al mover el VUP o VRP.

# Normalización (proyección paralela)



Volumen de vista de paralelepípedo infinito para una proyección paralela ortográfica. VPN y la dirección de proyección (DOP) son paralelas. DOP es el vector de PRP a CW y es paralelo a VPN.

# Proceso de Visualización





**Perspectiva:** pirámide semi-infinita (ápice= PRP )  
pirámide finita

\*plano de recorte anterior

- distancia al plano anterior  $F$  (vc)

( negativa si estas detrás del plano de proyección )

\*plano de recorte posterior

- distancia al plano posterior  $B$  (vc)

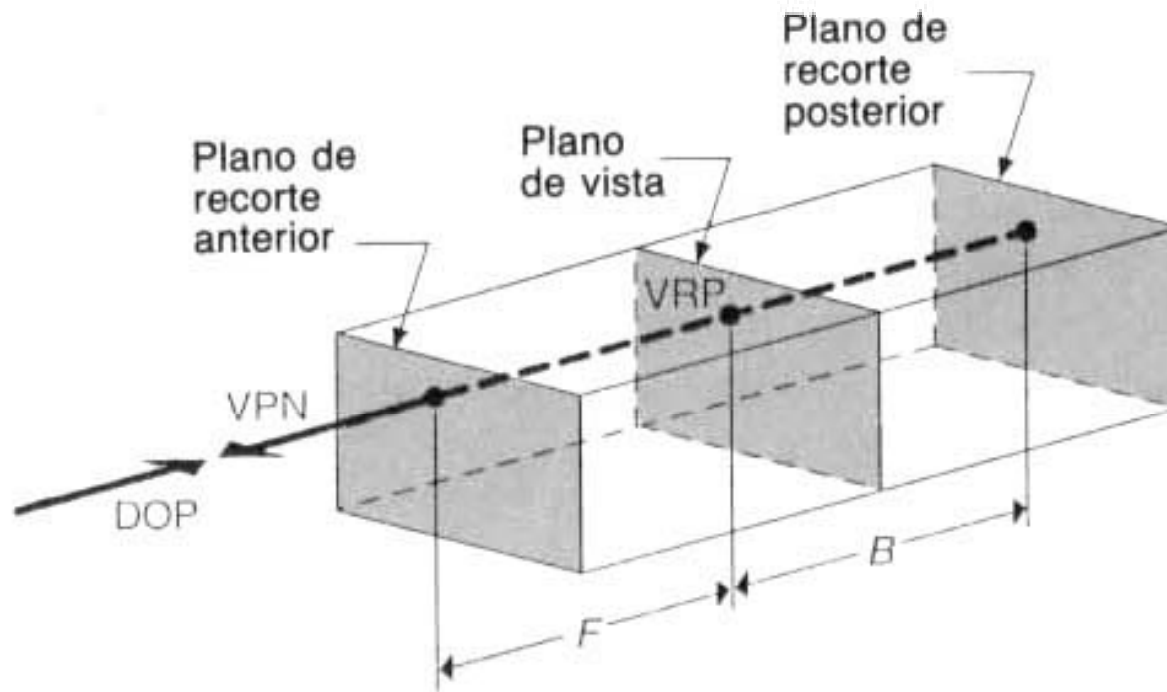
( negativa si esta detrás del plano de proyección)

**Paralela:** Paralelogramo infinito

\*El grueso del volumen es  $F - B$

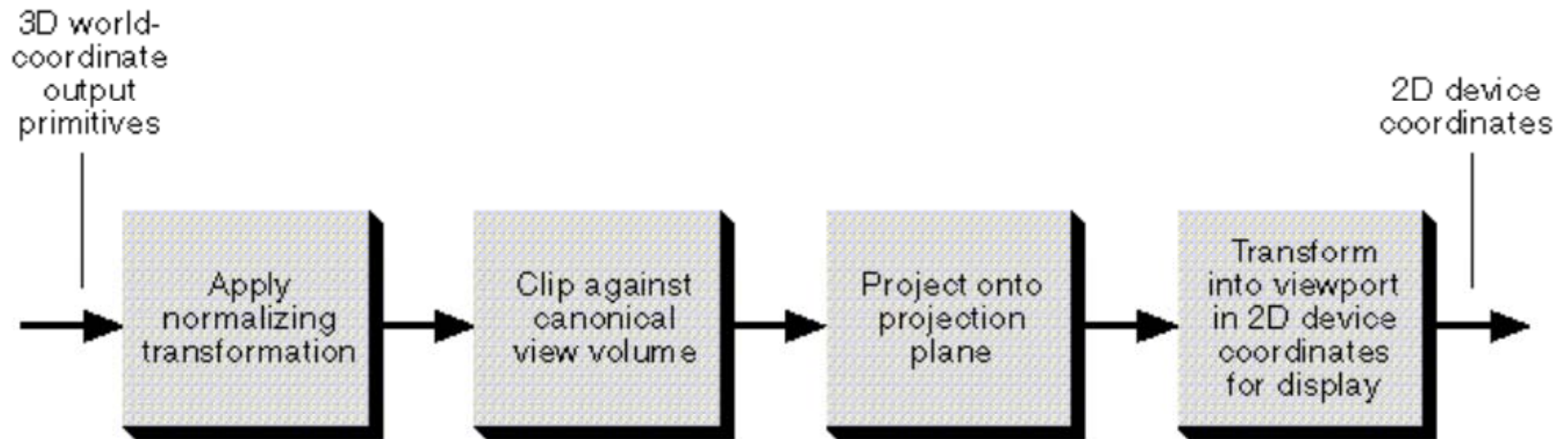


# Recorte de Visualización



Volumen de vista truncado para una proyección paralela ortográfica. DOP es la dirección de la proyección.

# Proceso de Visualización



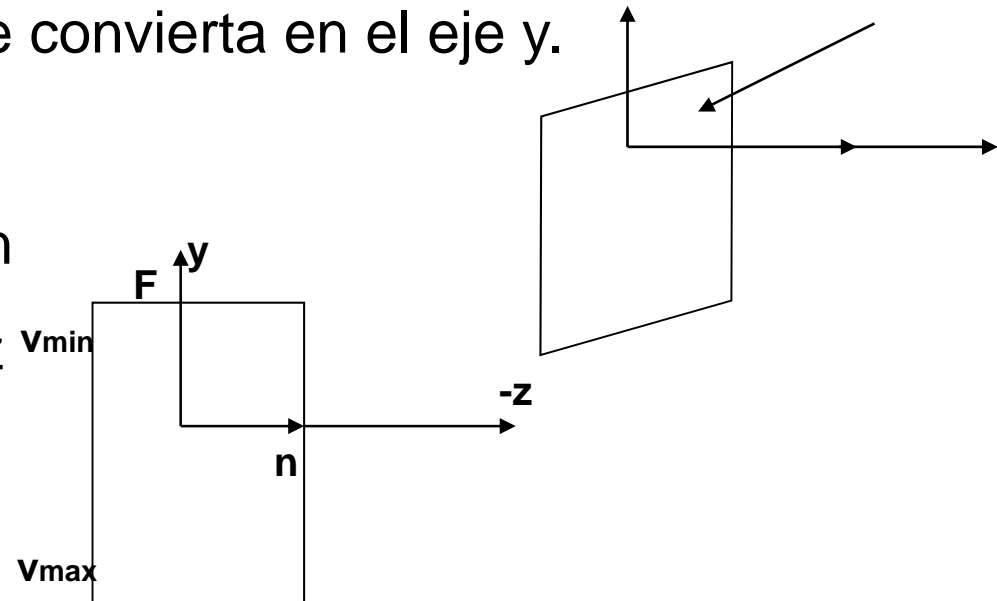
# El caso de la proyección paralela



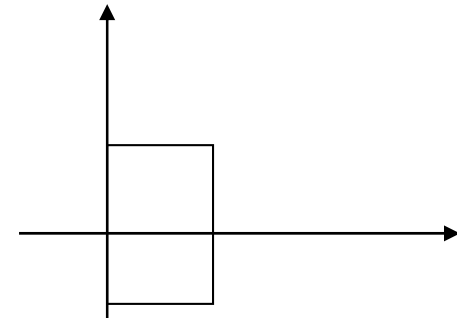
1. Trasladar VRP al origen
2. Rotar VRC de manera que el eje  $n$  (VPN) se convierta en el eje  $z$ , el eje  $u$  se convierta en el eje  $x$  y el eje  $v$  se convierta en el eje  $y$ .

$$\text{VPN} = +z, \quad x = u, \quad y = v$$

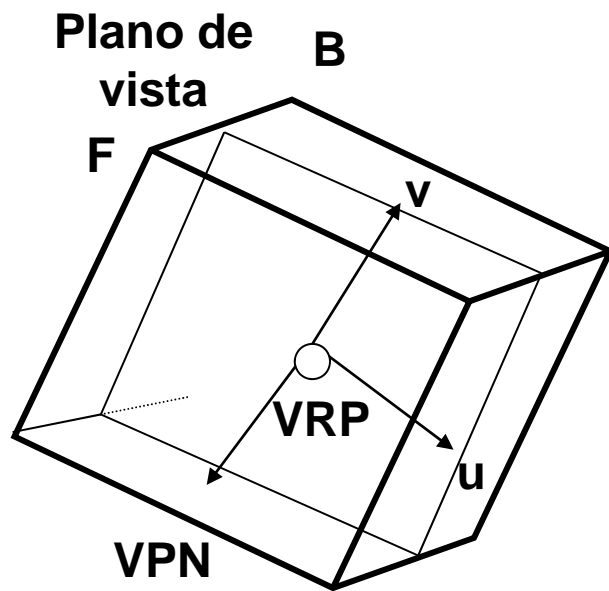
3. Sesgar de manera que la dirección de proyección sea paralela al eje  $z$



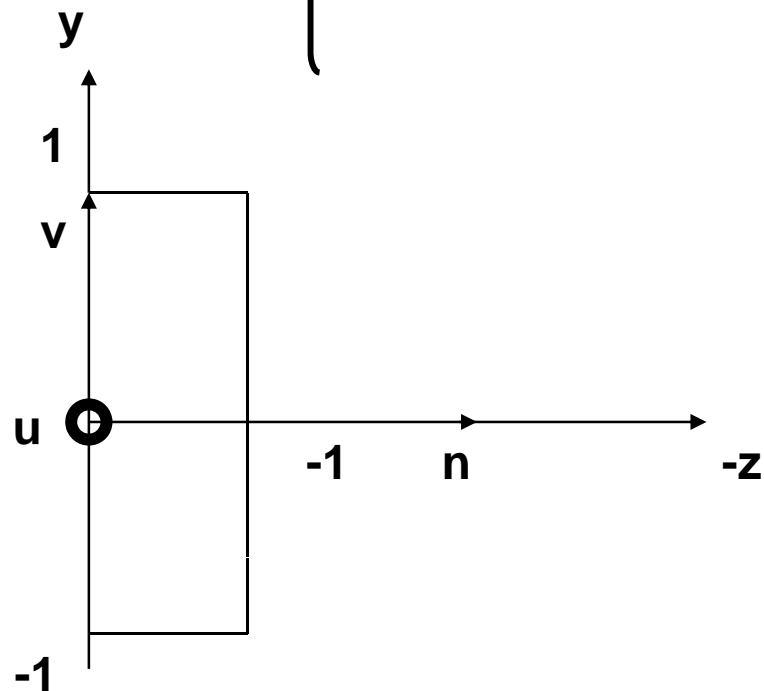
4. Trasladar y escalar al volumen de vista canónico de proyección paralela



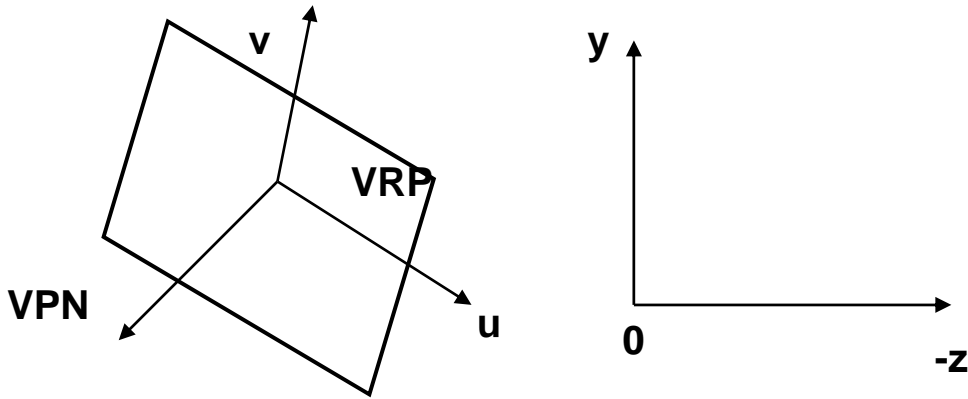
# El caso de la proyección perspectiva



Dados:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{VRP} \\ \text{VPN} \\ \text{umin, umax, vmin, vmax} \\ \text{F, B} \\ \text{PRP} \end{array} \right.$

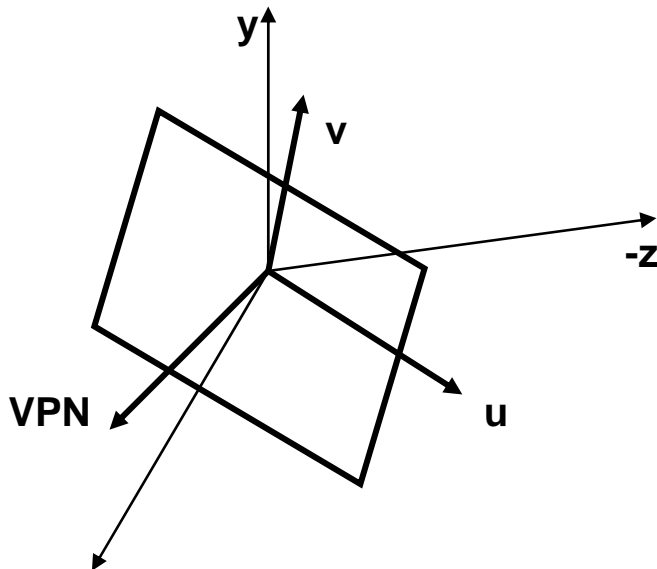


# El caso de la proyección perspectiva



Dado:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{VRP} \\ \text{VPN} \\ \text{umin, umax, vmin, vmax} \\ \text{F, B} \\ \text{PRP} \end{array} \right.$

1. Trasladar VRP al origen

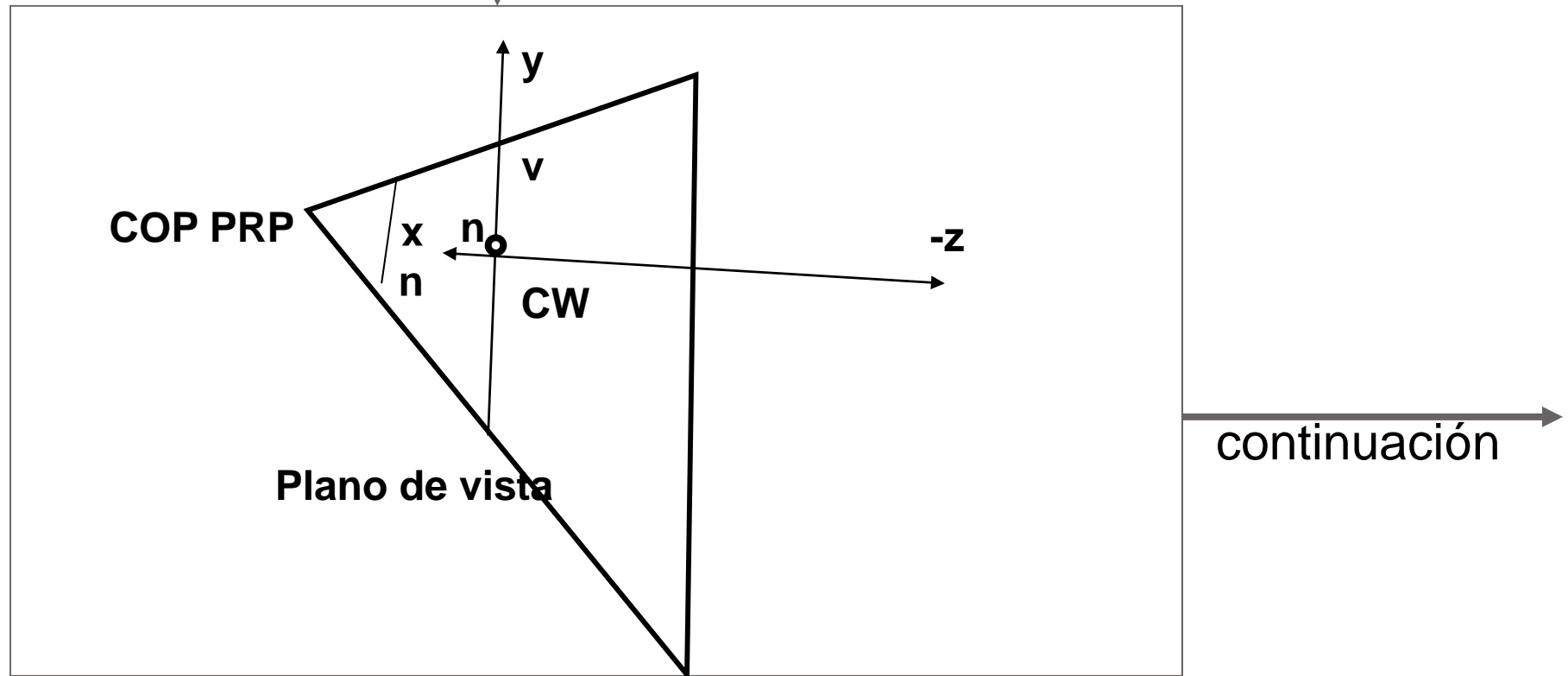


—————>  
continuación

# El caso de la proyección perspectiva



2. Rotar VRC así  $n=z, u=x, v=y$



\* CW es especificado local pero también es global, porque VRC

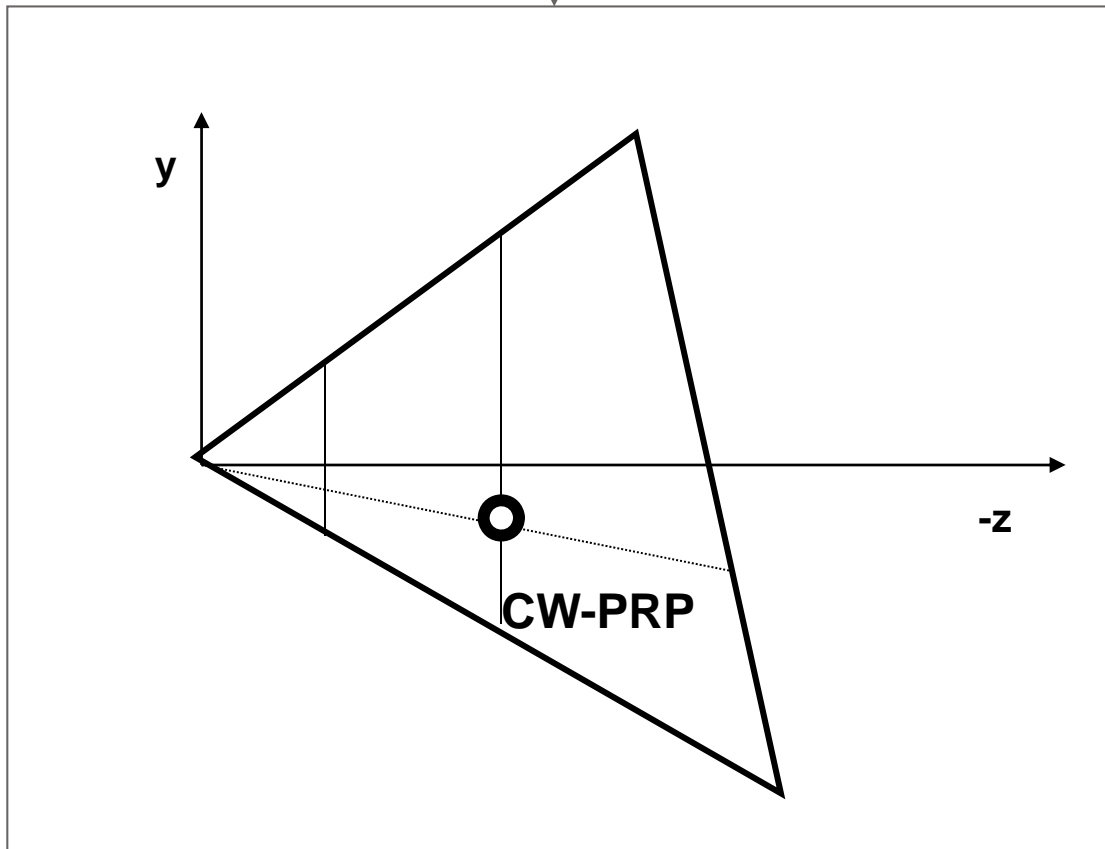
$$\left( \frac{u \min + u \max}{2}, \frac{v \min + v \max}{2}, 0 \right)$$

WC.

# El caso de la proyección perspectiva



3. Transladar así COP(PRP) va hacia el origen.

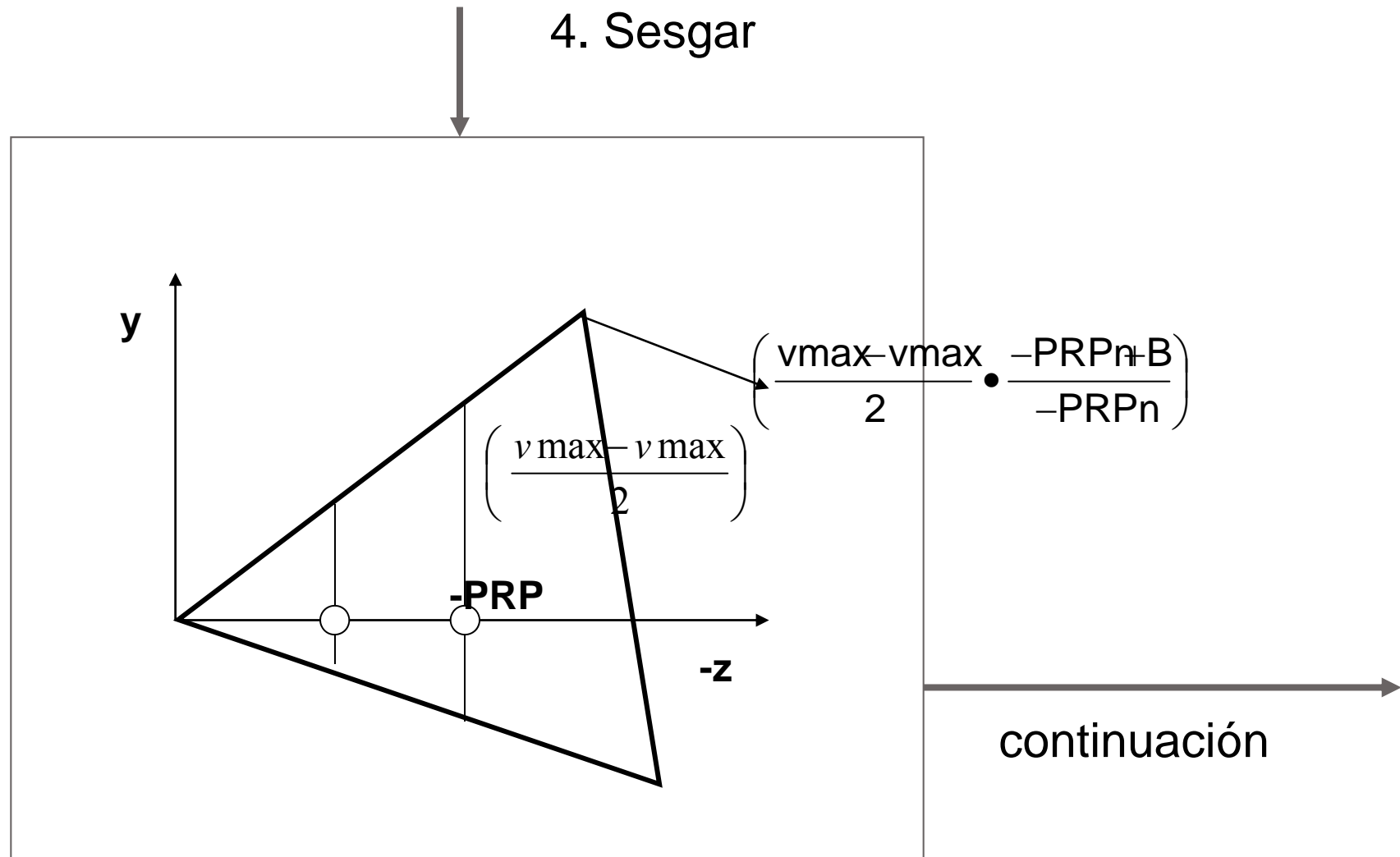


continuación

# El caso de la proyección perspectiva



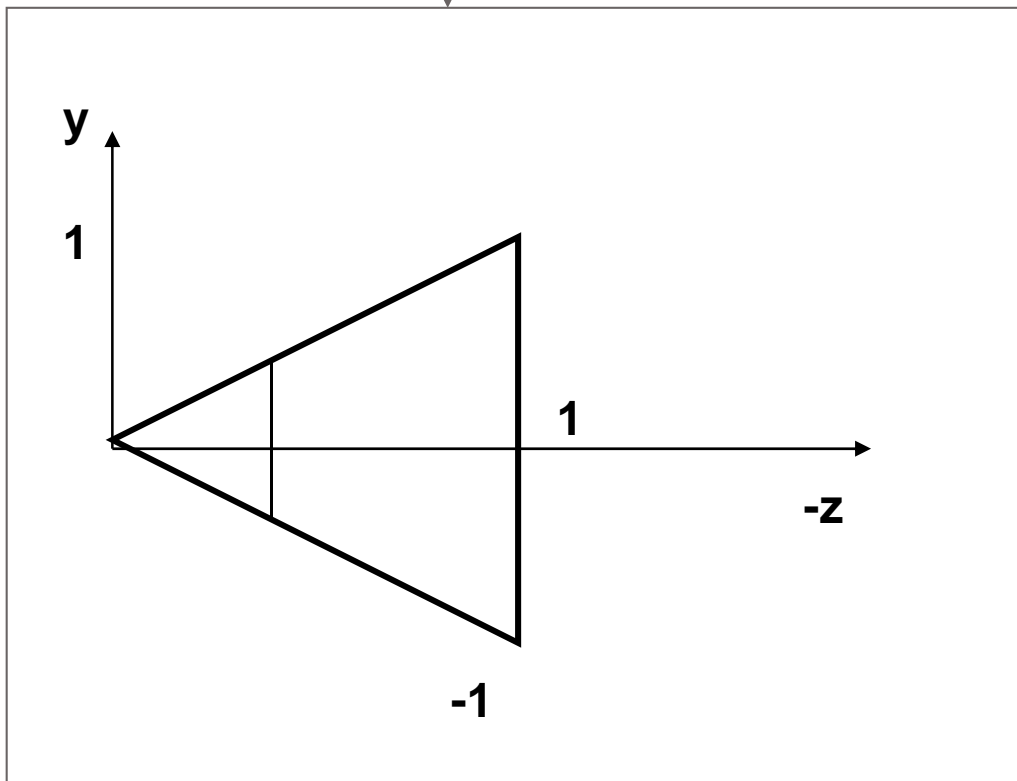
## 4. Sesgar



# El caso de la proyección perspectiva



5. Escalar así B va hacia -1.



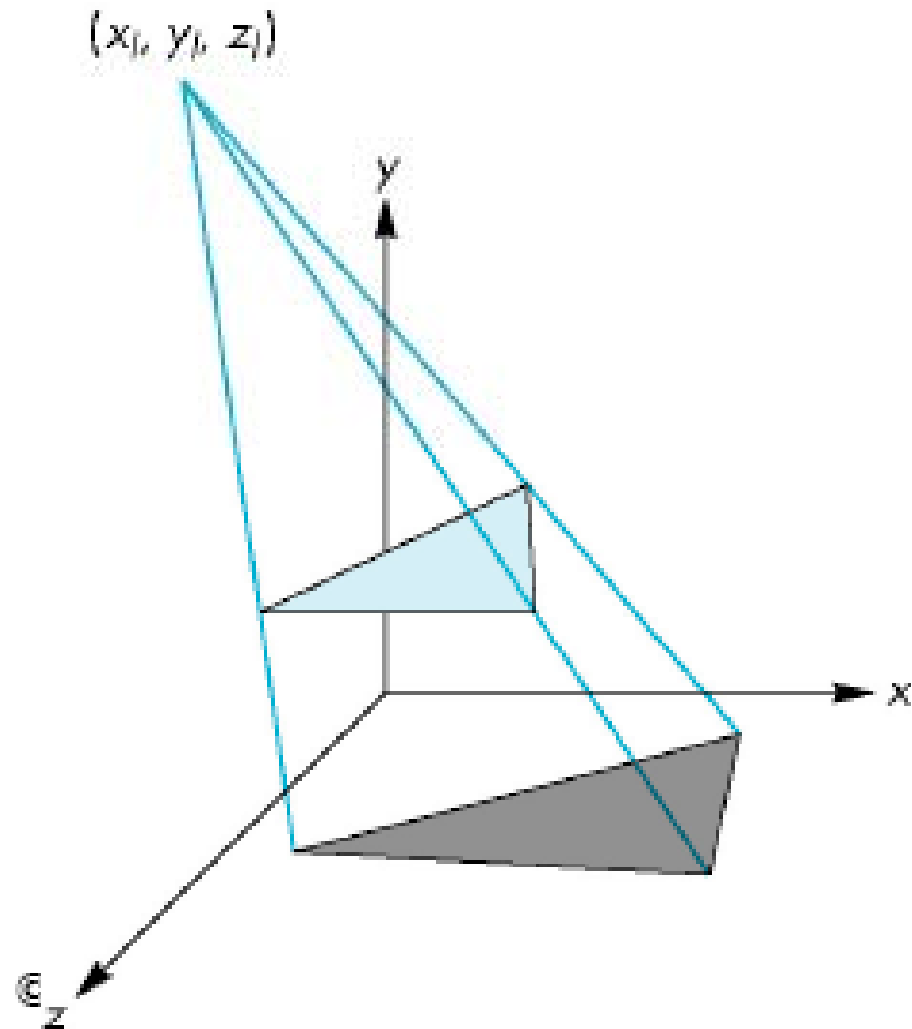


- ❑ Definir la posición de la cámara
  - ❑ Punto del observador: (*eyex*, *eyey*, *eyez*)
  - ❑ Punto de referencia: (*atx*, *aty*, *atz*)
  - ❑ Vector vertical: (*upx*, *upy*, *upz*)
- ❑ In OpenGL:
  - ❑ `glMatrixMode(GL_MODELVIEW);`
  - ❑ `gluLookAt(eyex, eyey, eyez, atx, aty, atz, upx, upy, upz)`
  - ❑ `glMatrixMode(GL_PROJECTION)`
  - ❑ `glOrtho(xwmin, xwmax, ywmin, ywmax, zwmin, zwmax, near, far)`
  - ❑ `glFrustum(xwmin, xwmax, ywmin, ywmax, near, far)`



- ❑ La sombra es un componente esencial para el proceso de *rendering*
- ❑ Usa las proyecciones
  - ❑ Sombras (hard shadows)
  - ❑ Manejar sombras en un plano
- ❑ Otros tipos de sombras
  - ❑ Sombras suaves (soft shadows)
  - ❑ Penumbra (no son fáciles de implementar)

# Sombras

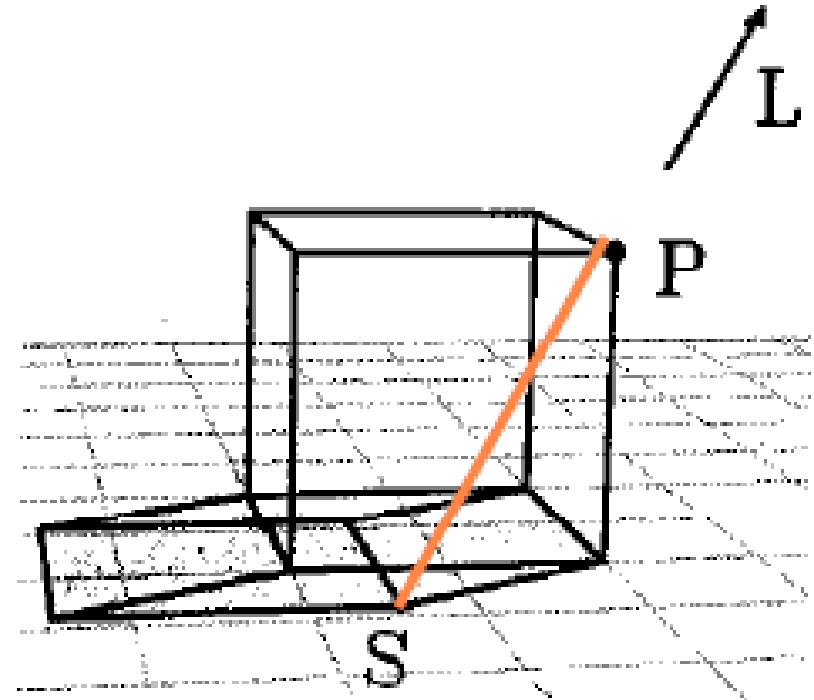


# Proyección de sombra paralelas



- Proyecta la sombra en  $z = 0$
- Dirección a la luz
- Deriva la matriz

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_L/z_L & 0 \\ 0 & 1 & -y_L/z_L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

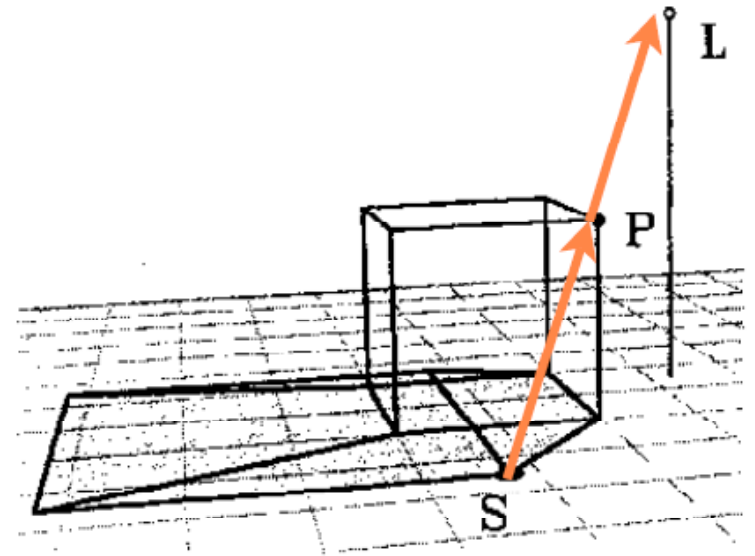


# Proyección de sombra paralelas



- Proyecta la sombra en el eje  $z=0$
- Punto de la fuente de luz

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_L & 0 & x_L & 0 \\ 0 & -z_L & y_L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$



# Sobreado (hard shadow)

