Modelado de Sólidos

Prof. Eduardo Fernández (Universidad de la República de Uruguay) - http://www.fing.edu.uy/inco/cursos/compgraf/

Prof. Juan Carlos Peris (Universidad Jaume I)

Capitulo 8. Gráficos por computadora con OpenGL por Donald Hern y Pauline Baker

Representación de sólidos

Un modelo es una representación de la realidad.

- Permite estudiar y comprender el comportamiento de la realidad bajo análisis.
- En algunos casos, proporcionar medios para predecir la evolución del modelo planteado.

Problemas:

- La realidad es muy compleja.
- No queda otra alternativa que recurrir a simplificaciones.

Representación de sólidos

Los sistemas de representación de sólidos describen objetos.

- Diferentes modelos geométricos se aplican en la construcción de objetos tridimensionales.
- Las diferentes técnicas empleadas persiguen, sin que todas lo consigan:
  - Distinguir partes internas, partes externas, superficies, etc.
  - Determinar las posibles interferencias entre sólidos.
  - Aplicar análisis (simulación) para determinar la respuesta de los sólidos a factores como la tensión, la temperatura, etc.

Representación de sólidos

Las dos características a resolver con un modelo geométrico son:

- La forma de representación del sólido.
- La forma de almacenamiento. Conciliación entre espacio de almacenamiento y tiempo de proceso.

Requisitos de un modelo de representación de sólidos.

- **Precisión**. Representación real de un objeto, sin aproximaciones.
- **Dominio**. Conjunto de objetos que se pueden representar con el modelo.
- **Ausencia de ambigüedad**. No deben existir dudas sobre el objeto representado.

Representación de sólidos

Requisitos de un modelo de representación de sólidos.

Unicidad. Un sólido se codifica de una única forma.

Validez. Un modelo de representación impide la reproducción de sólidos no válidos.

Cierre. Operaciones sobre sólidos dan como resultado nuevos sólidos.

Compacta. Reducir el espacio de almacenamiento, mejorándose el rendimiento del sistema.

Eficiencia. Algoritmos eficientes en el cálculo de las propiedades físicas de los sólidos, así como su representación en pantalla.

Representación de sólidos

Modelado de alambre:

Hoy en día es considerado una forma de representación más que un método de modelado.

Un objeto es representado mediante una colección de aristas. El esqueleto del objeto.

Ninguna información sobre las propiedades superficiales.

Ventajas.

Simplicidad de cálculos. Únicamente muestra la composición de la escena.

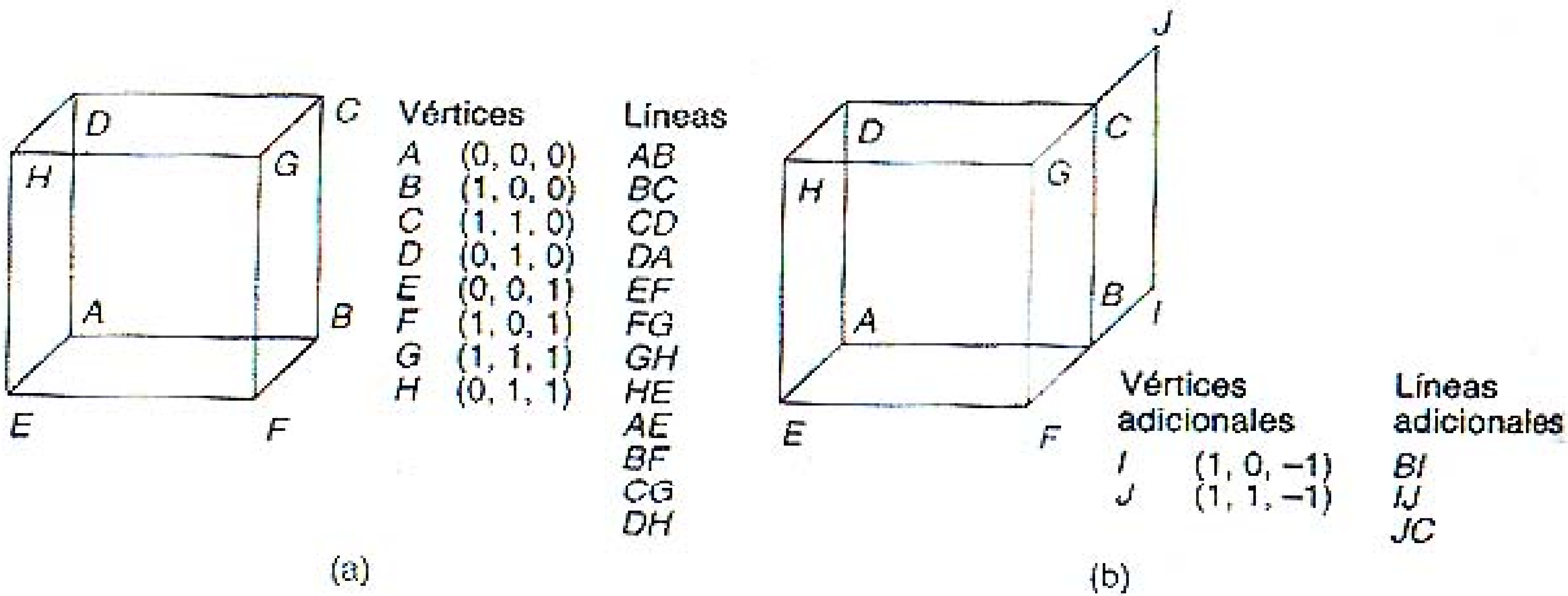
Representación de sólidos

Desventajas.

- Ambigüedad en la representación. No se pueden eliminar líneas ocultas, no existen caras.
- La información sobre el volumen real es inexistente.
- Incapacidad de representar perfiles curvados. Las superficies curvas se intuyen, pero no se representan (ejemplo, cilindro).
- Incapacidad de detectar interferencias entre objetos. Se desconocen los límites del objeto.
- Dificultades en el cálculo de las propiedades físicas de los objetos.
- Incapacidad para aplicar métodos de iluminación y sombreado. Realismo muy pobre.

Representación de sólidos

¿En la siguiente figura se define un cubo sólido?



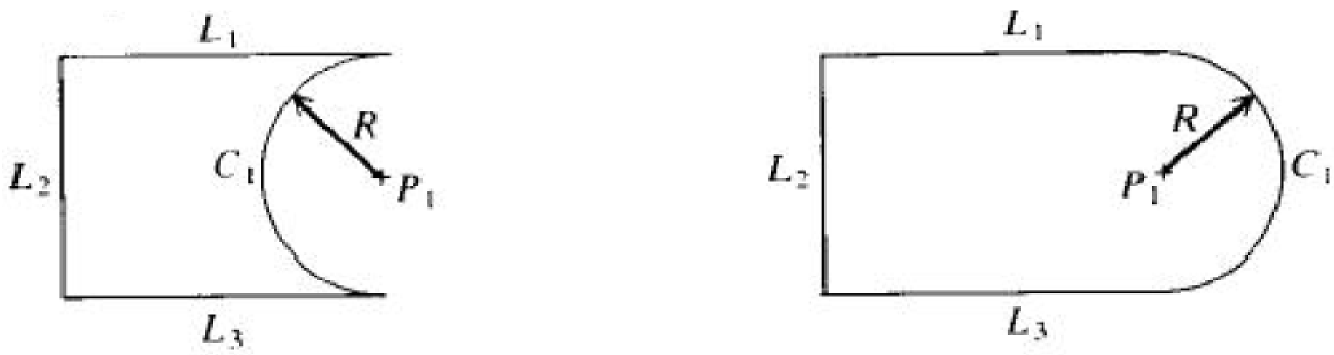
(a) Cubo alambrado compuesto por 12 líneas rectas. (b) Cubo alambrado con una cara adicional.

Modelado de sólidos

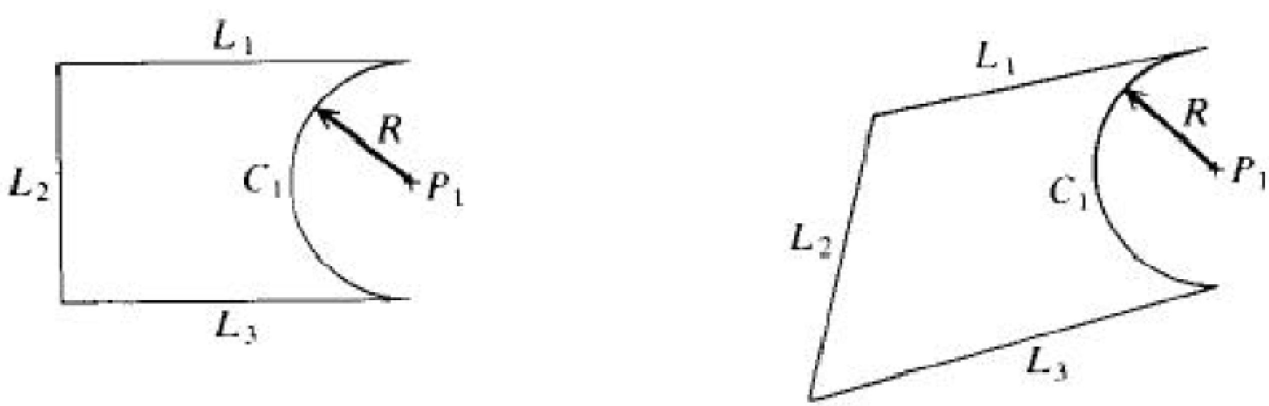
- Ventajas:
  - Permite clasificación espacial (spatial addressability).
  - Útil para calculo de interferencias, masa, etc.
  - Almacenan información geométrica y topológica.

- Desventajas:
  - No es posible la construcción automática de otros modelos a partir de modelos sólidos.
  - No es posible la generación automática de modelos sólidos a partir de otros modelos.

Información Geométrica y Topológica



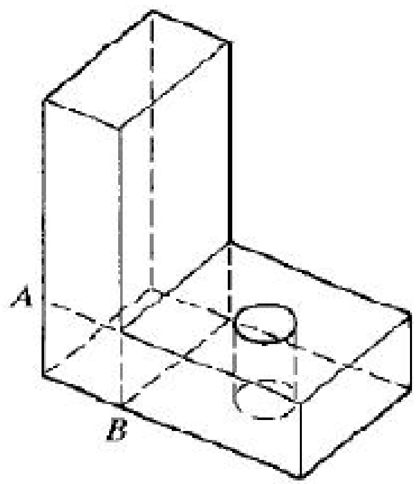
(a) Same geometry but different topology



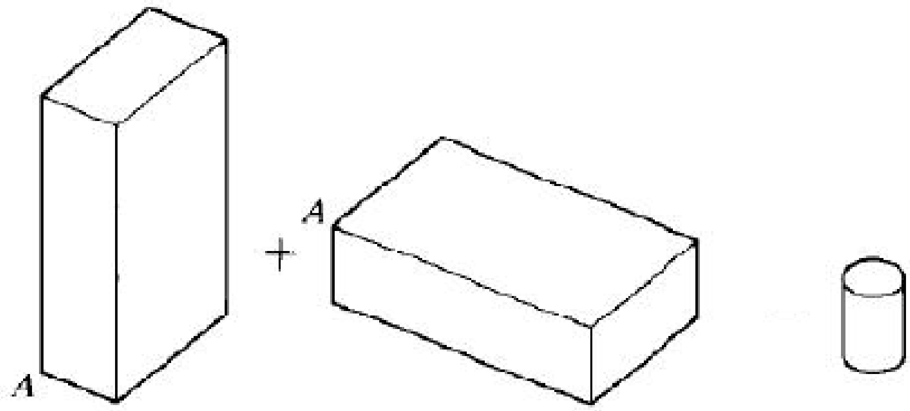
(b) Same topology but different geometry

Modelos Sólidos

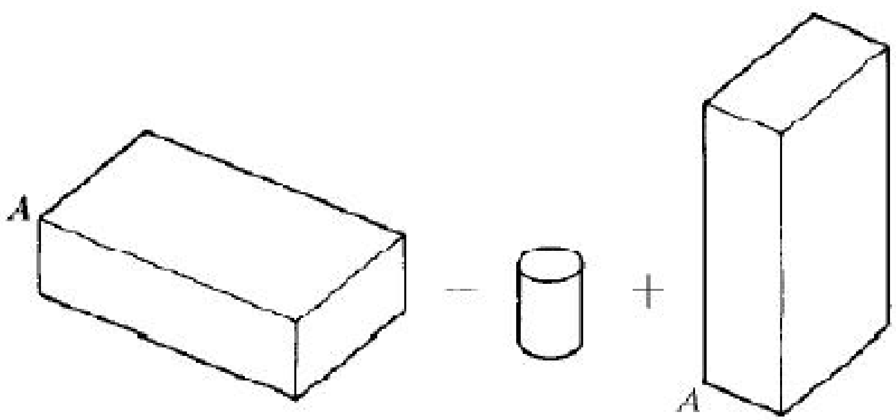
- La construcción de un modelo no es única.



(*a*) Object



(*b*) Possible solid model of the solid

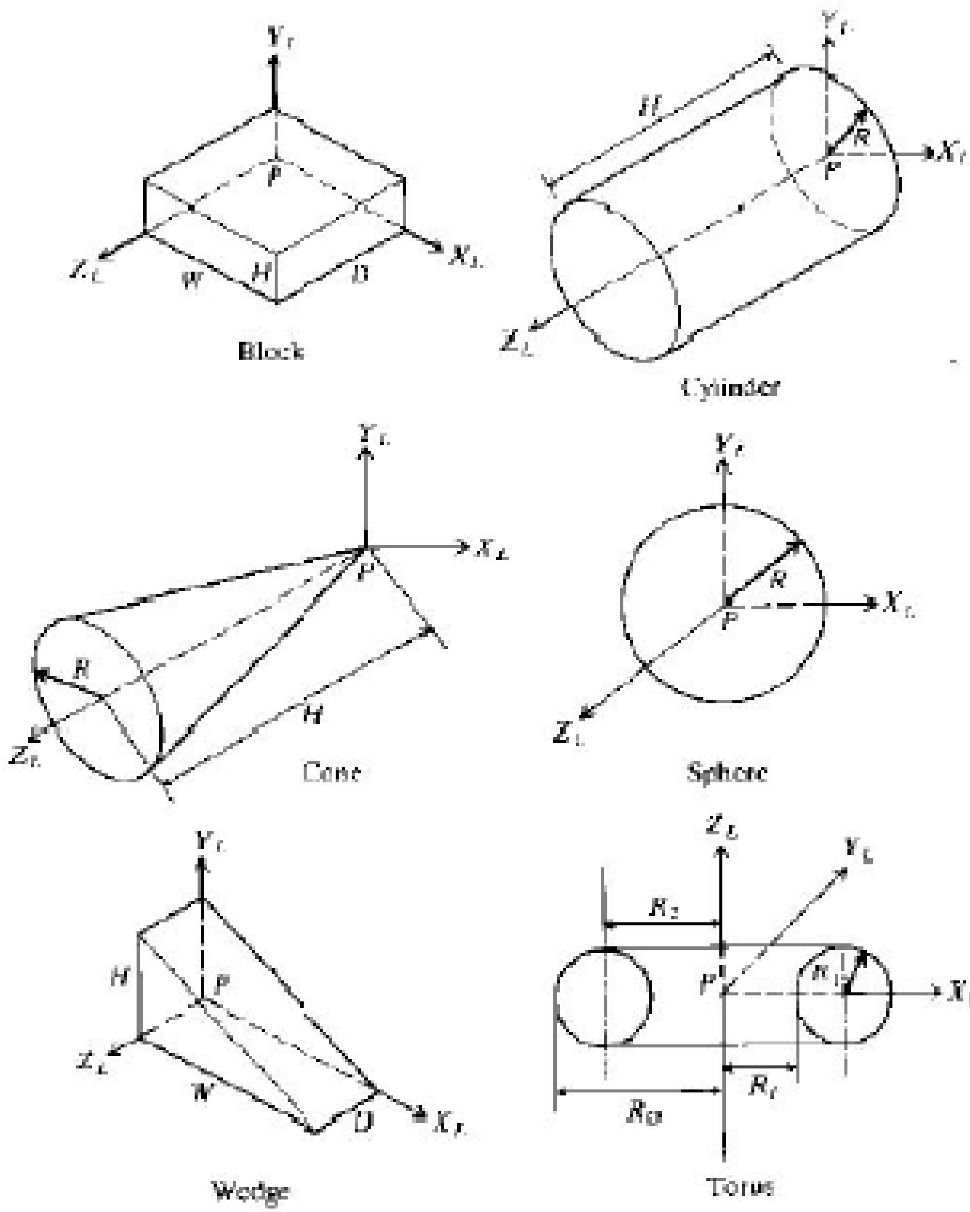


(*c*) Alternative solid model of the object

Entidades sólidas

- Las primitivas se introducen a través de una localización, geometría y orientación:
  - BLOQUE: Origen, altura, anchura, profundidad.
  - CILINDRO: Origen, radio y longitud.
  - CONO: Origen, radio base, radio superior y altura.
  - ESFERA: Centro y radio (diámetro)
  - CUÑA: Origen, altura anchura y profundidad de la base.
  - TORO: Centro, radio interno y radio externo.

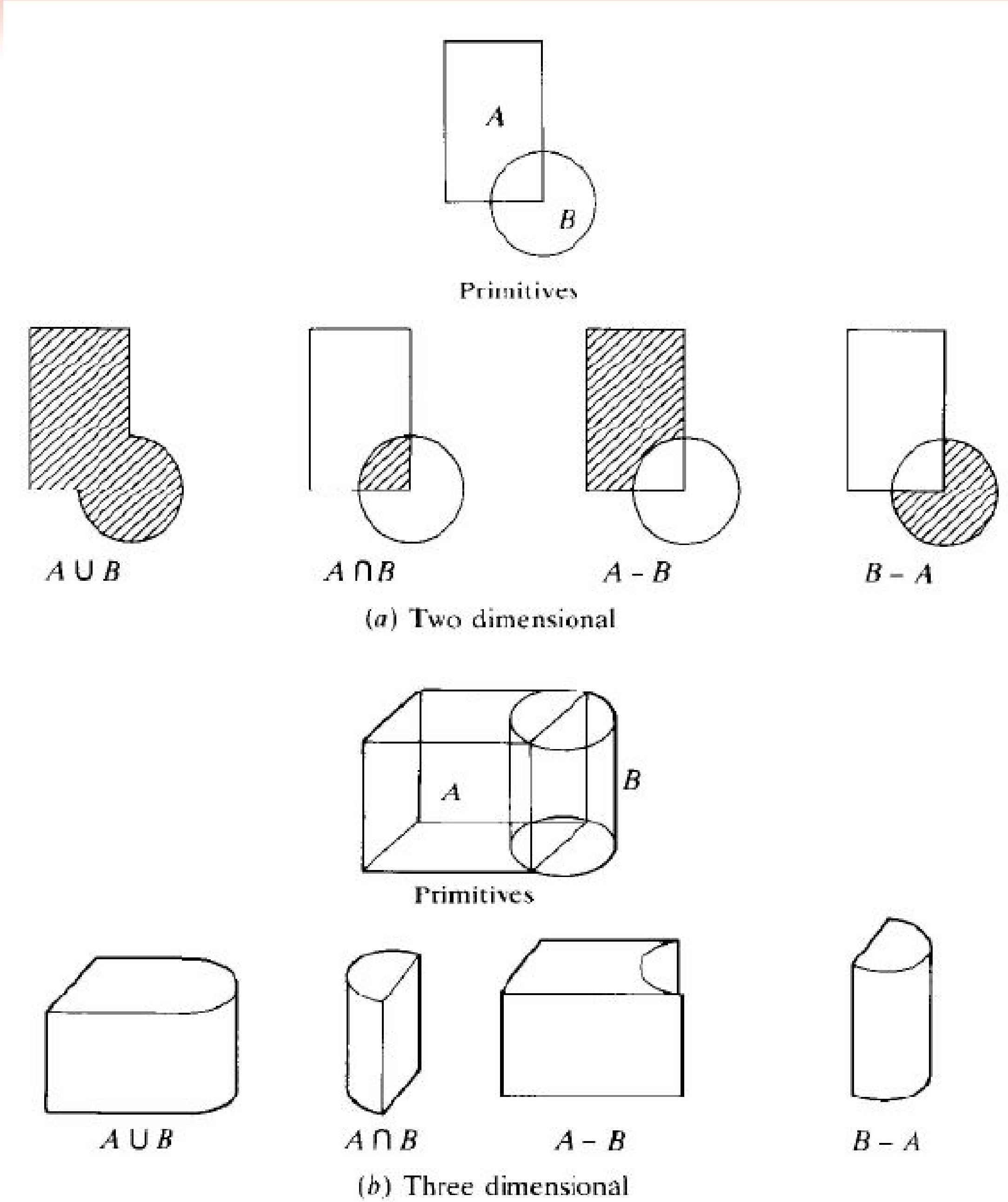
Entidades sólidas



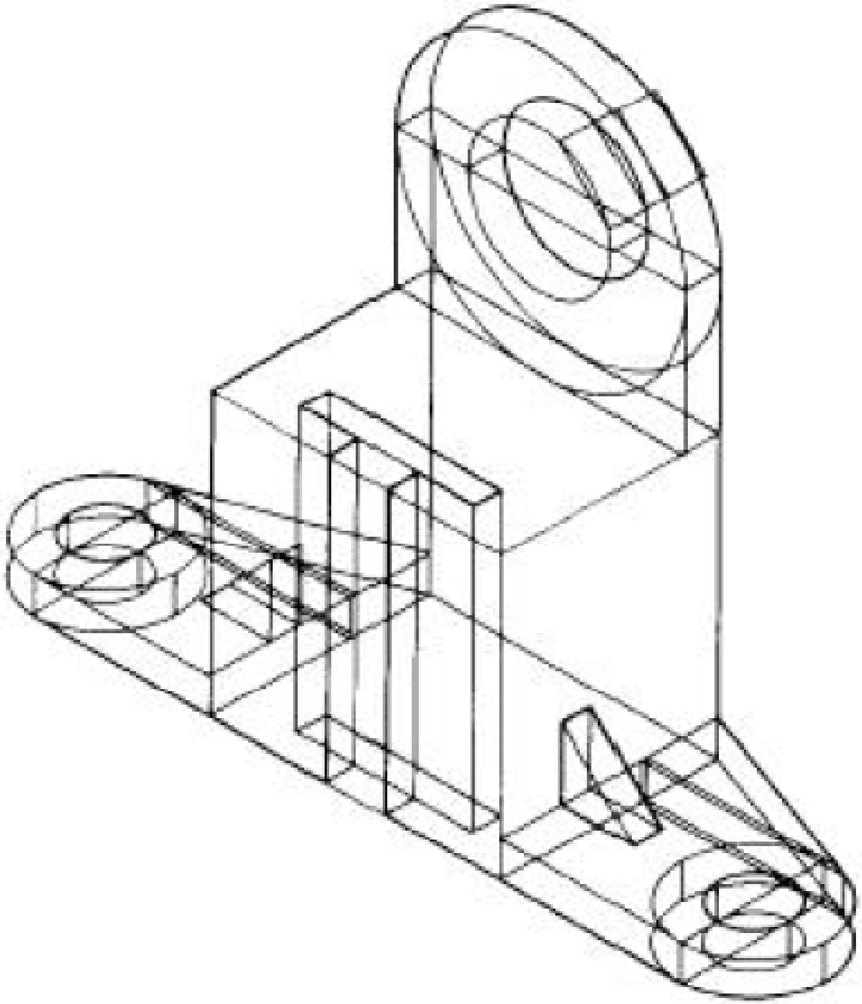
Entidades sólidas

- Operaciones booleanas:
  - $\cup$ ó + ⇨ Unión.
  - $\cap$ ó I ⇨ Intersección
  - - ⇨ Diferencia.

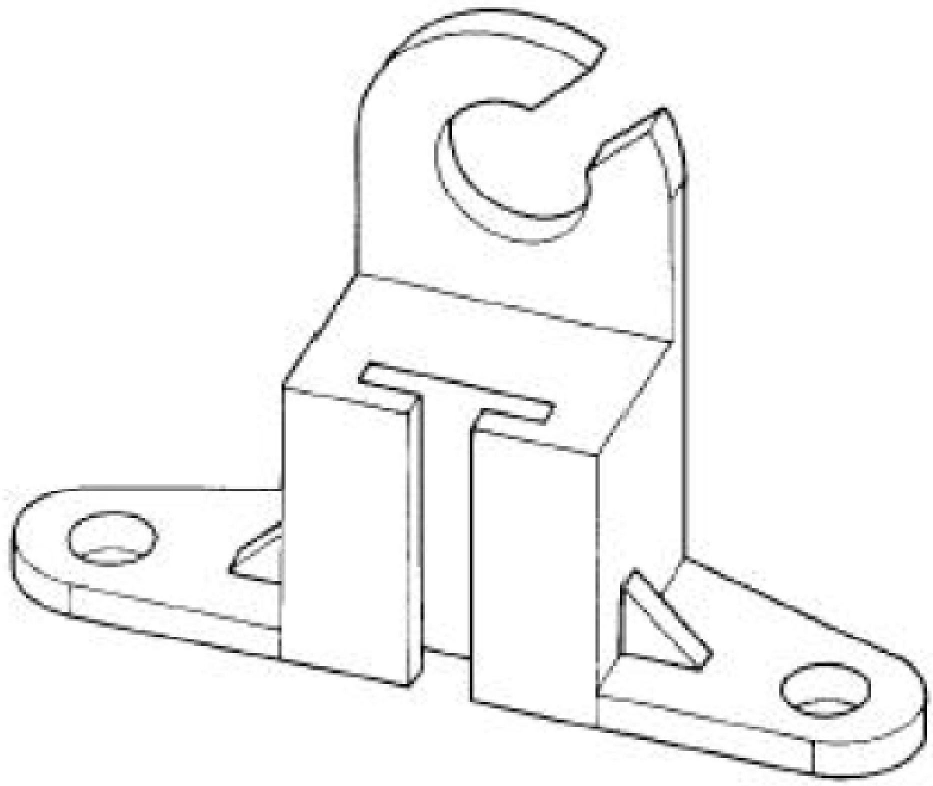
Entidades sólidas



Entidades sólidas



(c) Primitives in their proper locations and orientations



(d) Final solid model

Representación de sólidos

- La representación de sólidos fundamentalmente se basa en la noción de que un sólido divide el espacio en dos regiones: interior y exterior del sólido.
- La separación entre regiones es realizada por los bordes del sólido, los cuales representan superficies.
- Por lo tanto, un sólido se define matemáticamente cómo un conjunto de puntos S que cumplen,

$$S = iS \cup bS$$

- dónde

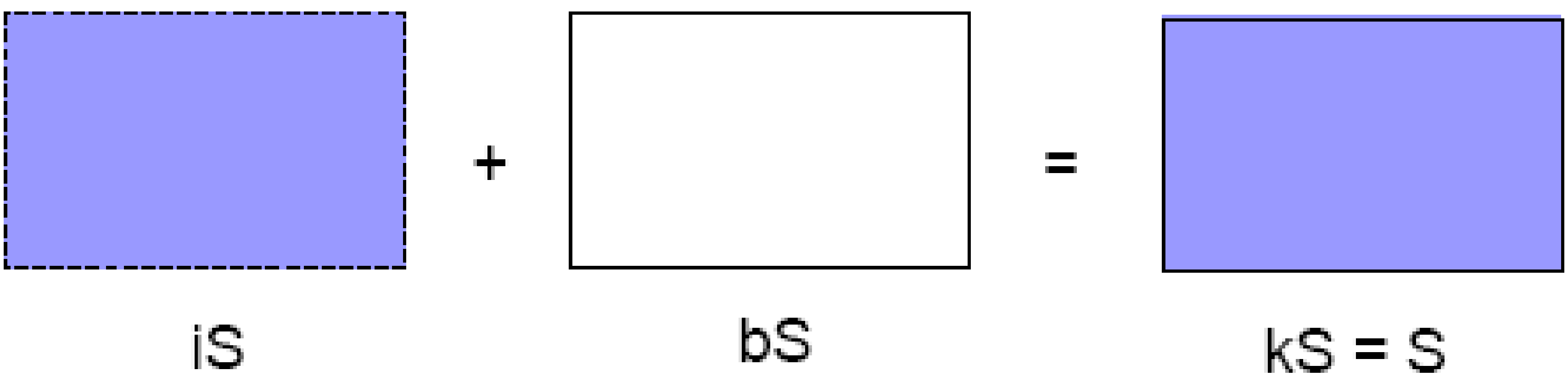
iS ⇨ conjunto de puntos del interior del sólido.

bS ⇨ conjunto de puntos del borde del sólido.

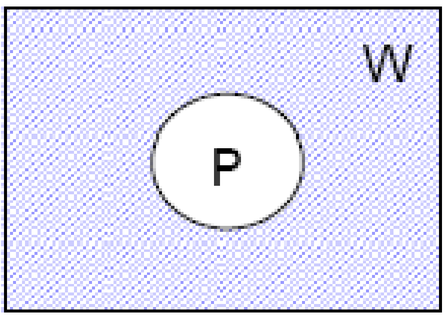
Representación de sólidos

- Las definiciones anteriores introducen el concepto de cierre geométrico, el cual implica que el interior de un sólido está geométricamente cerrado por sus contornos,

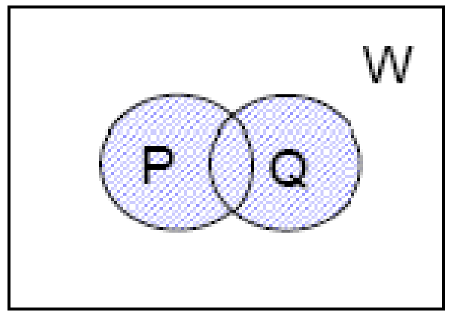
$$S = iS \cup bS$$



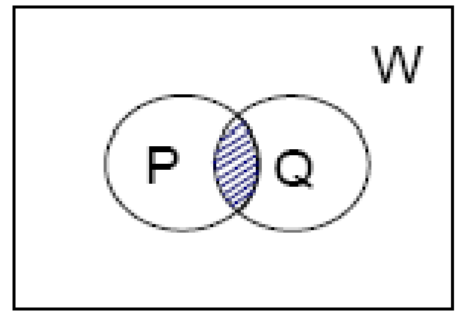
Representación de sólidos



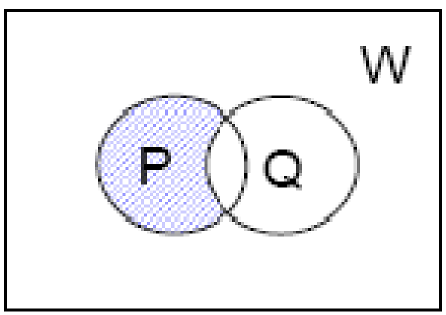
cP



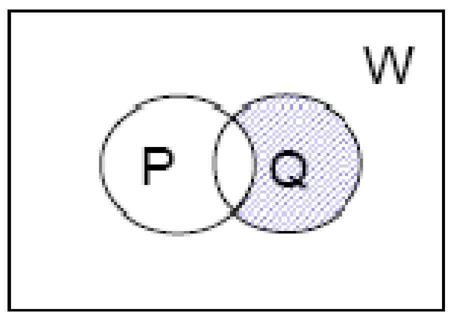
$P \cup Q$



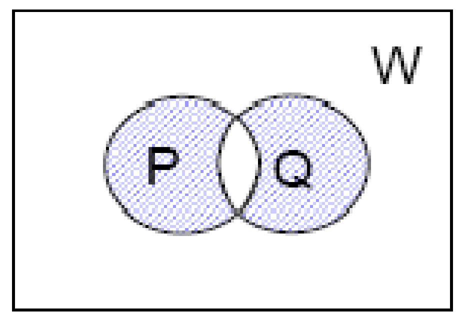
$P \cap Q$



$P - Q$

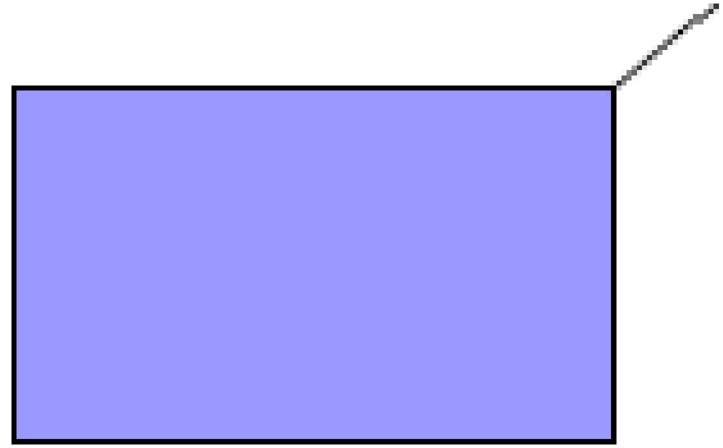


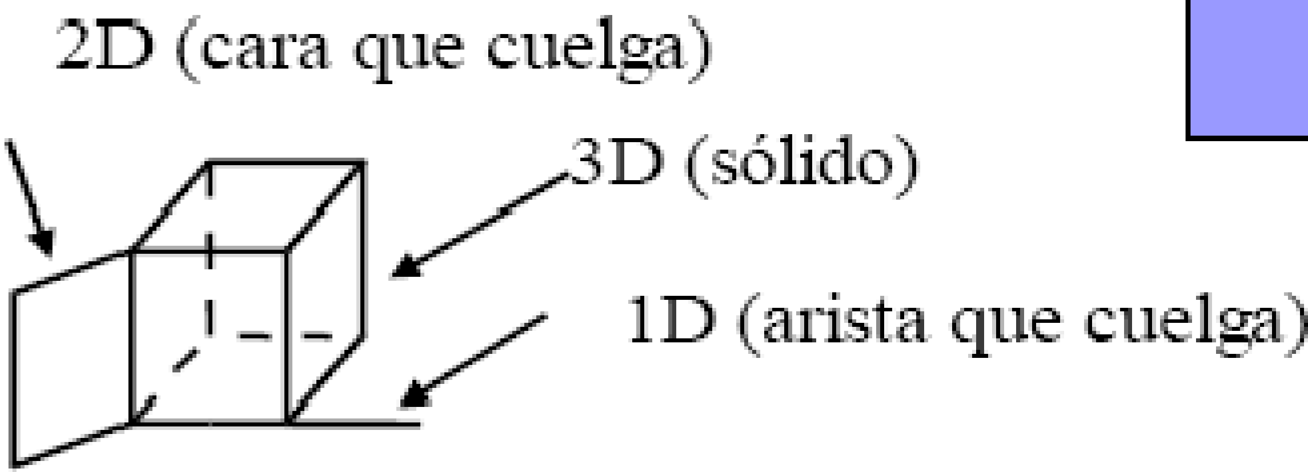
$Q - P$



$P \Delta Q$

Representación de sólidos





El objeto no es regular por tener elementos 2D y 1D.

Ejemplo de objetos no regulares

Modelos Sólidos

- Existen distintos tipos de representación de modelos sólidos, por ejemplo:
  - Semi-espacios
  - B-Rep (boundary representation). Puede representar superficies generales a costa de un mayor tiempo de proceso.
  - CSG (constructive solid geometry). Fácil de construir pero con limitaciones para construir formas complejas.
  - Representación por barridos (sweep)
  - Compocisión espacial
    - Octree
    - BSP- tree (Binary Space Particioning)

Semi-espacios

- Entidades sin límites geométricos que dividen el espacio en 2 partes infinitas, dentro y fuera.

$$H = \{ P \,/\, P \in E \text{ y } f(P) < 0 \}$$

siendo:

P un punto del espacio

E el espacio completo de puntos

f(P) la ecuación del elemento que define la división del espacio.

Semi-espacios

- Los elementos básicos de división son:

Plano: $H = \{ (x, y, z) / z < 0 \}$

Cilindro: $H = \{ (x, y, z) / x^2 + y^2 < R^2 \}$

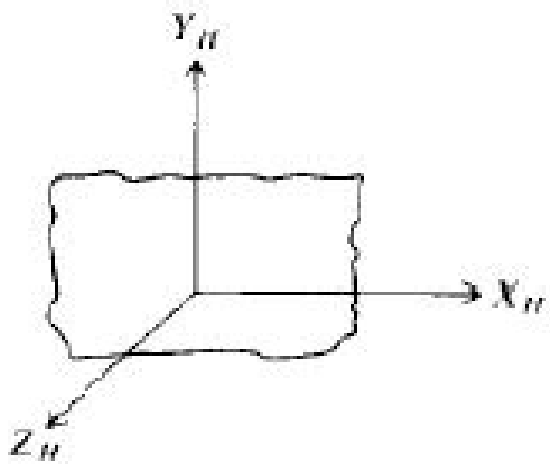
Esfera: $H = \{ (x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \}$

Cono: $H = \{ (x, y, z) / x^2 + y^2 < [\tan(\alpha/2) z]^2 \}$

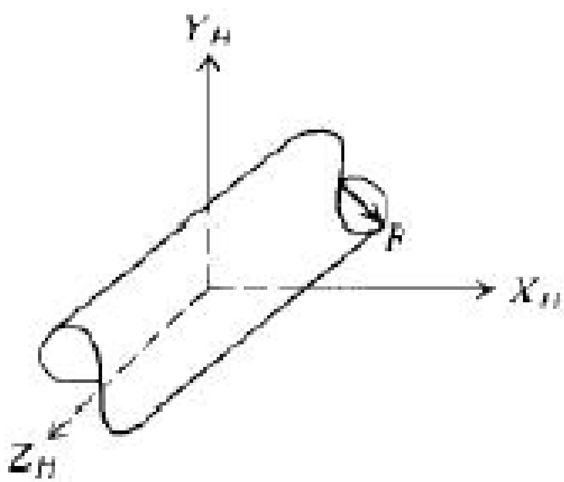
Toro:

$$H = \{ (x, y, z) / (x^2 + y^2 + z^2 - R_2^2 - R_1^2) < 4R_2^2 (R_1^2 - z^2) \}$$

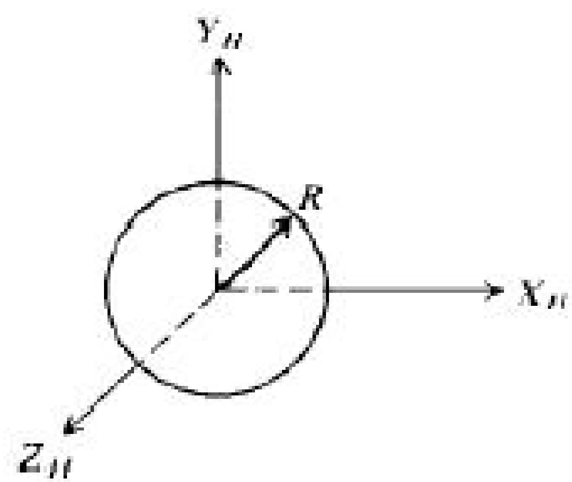
Semi-espacios



Planar half-space



Cylindrical half-space ($R > 0$)



Spherical half-space ($R > 0$)

Representación por frontera (B-Rep)

- B-Rep (Boundary representation)
- Muy utilizado (junto al CSG)
- Basado en la noción topológica de que un objeto físico tiene como limites un conjunto de caras cerradas y orientables.
  - cerradas: continuas, sin agujeros.
  - orientables: 2 direcciones posibles (dirección normal).
- El contorno de un objeto queda pues definido por:
  - caras ⇨ unión de aristas.
  - aristas ⇨ unión de vértices.
- Modelos no únicos.

Representación por frontera (B-Rep)

- Elementos básicos:
  - Primitivas: caras, aristas y vértices.
  - Objetos que se pueden construir:
    - Caras planas (poliedros).
    - Caras curvas (objetos curvos).
- Tipos de objetos poliédricos:
  - Simples (sin agujeros)
  - Caras con varias fronteras.
  - Con agujeros que no atraviesan el objeto por completo.
  - Con agujeros que atraviesan el objeto por completo.

Representación por frontera (B-Rep)

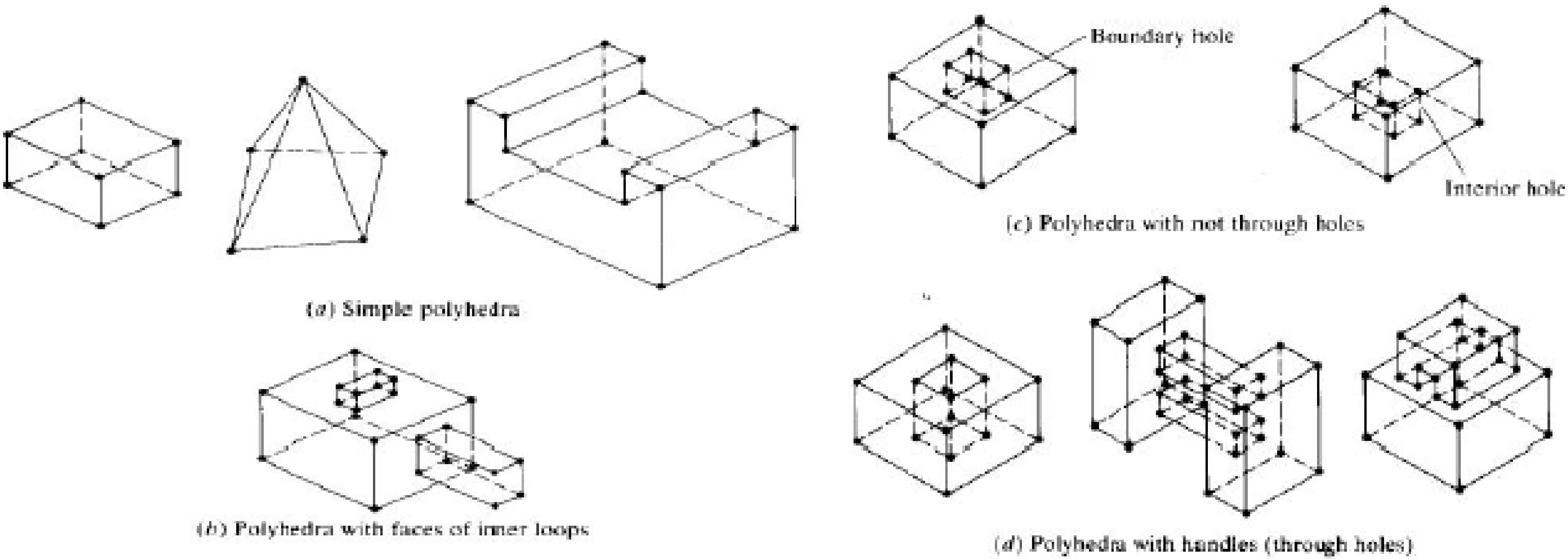


Figura 11: Tipos de objetos poliedricos

Representación por frontera (B-Rep)

- Primitivas:
  - **Vértice**: punto único en el espacio.
  - **Arista**: curva finita, orientada, delimitada por dos vértices (pueden ser el mismo), que no se autointersecta.
  - **Cara**: región finita, no autointersectante, de una superficie orientable, limitada por uno o más loops.
  - **Loop**: secuencia ordenada alternante de vértices y aristas no autointersectante y cerrado.
  - **Agujero que no atraviesa**: depresión de una cara de un objeto.
  - **Agujero que atraviesa**: túnel que perfora completamente el objeto. El número de agujeros de este tipo se denomina genus.
  - **Cuerpo**: conjunto de caras que delimitan un volumen cerrado continuo. Por lo tanto un cuerpo es una entidad que tiene caras, aristas y vértices.

Representación por frontera (B-Rep)

- Validación topológica:
  - Combinación de primitivas. Validación topológica de modelos (Ley de Euler):

$$F - E + V - L = 2\,(B - G)$$

dónde,

F ⇨ número de caras. E ⇨ número de aristas.

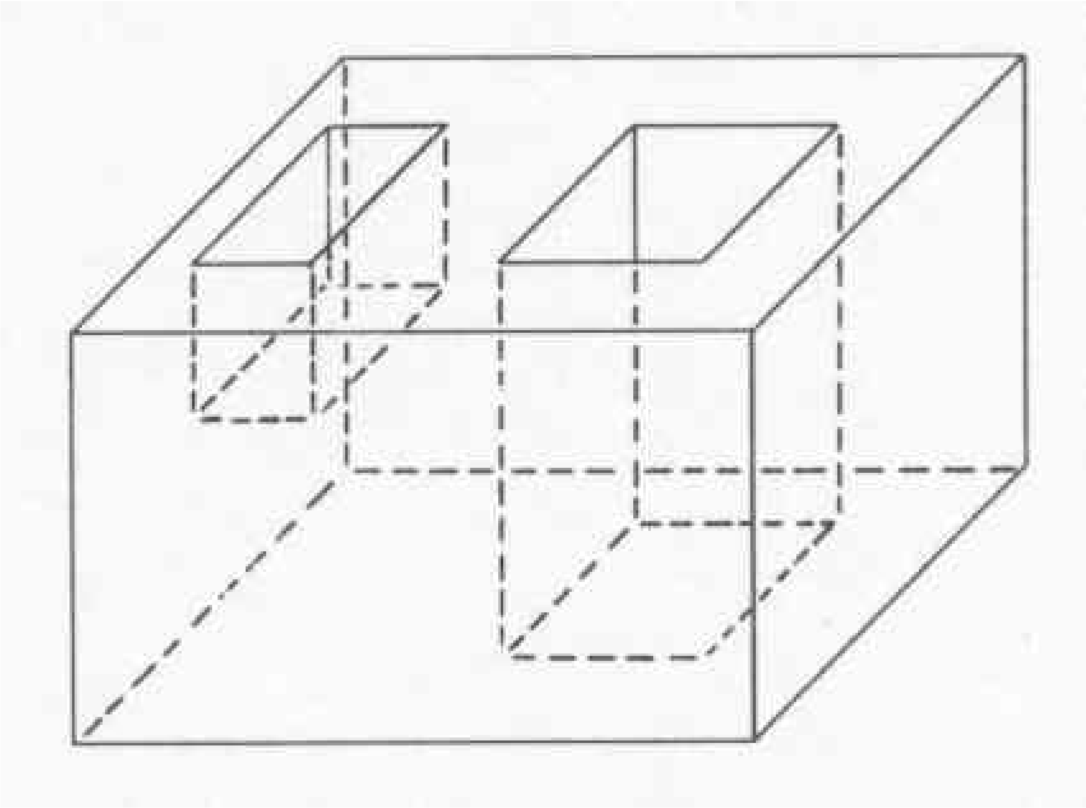
V ⇨ número de vértices. L ⇨ número de loops interiores.

B ⇨ número de cuerpos. G ⇨ número de genus.

Representación por frontera (B-Rep)

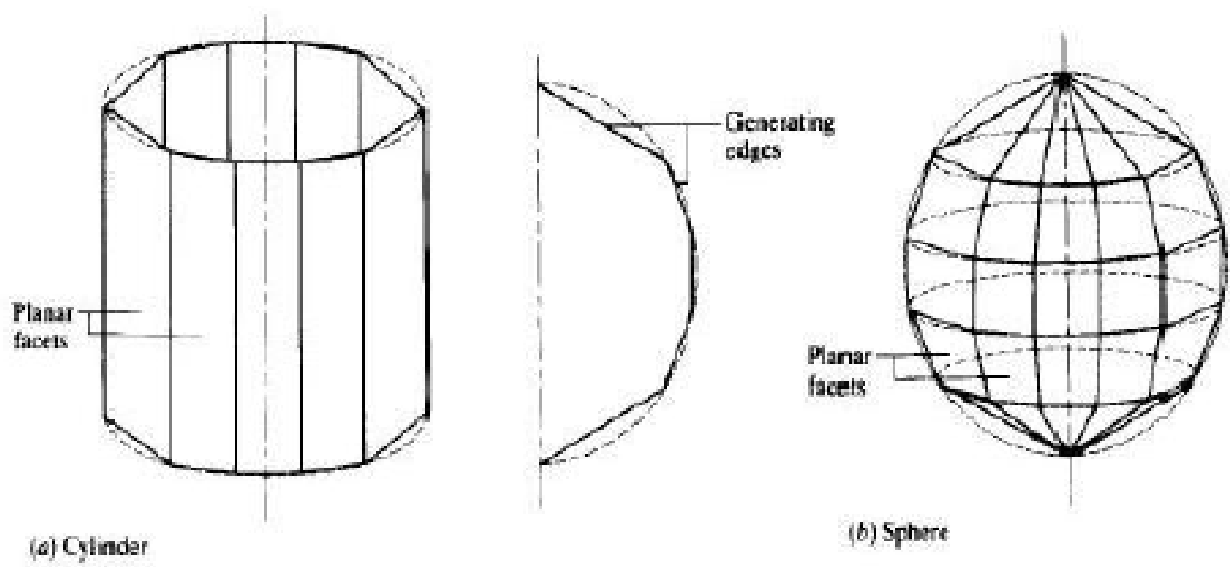
$$F - E + V - L = 2(B - G)$$

F 24; E 36; V 15; L 3; B 1; G 1



Representación por frontera (B-Rep)

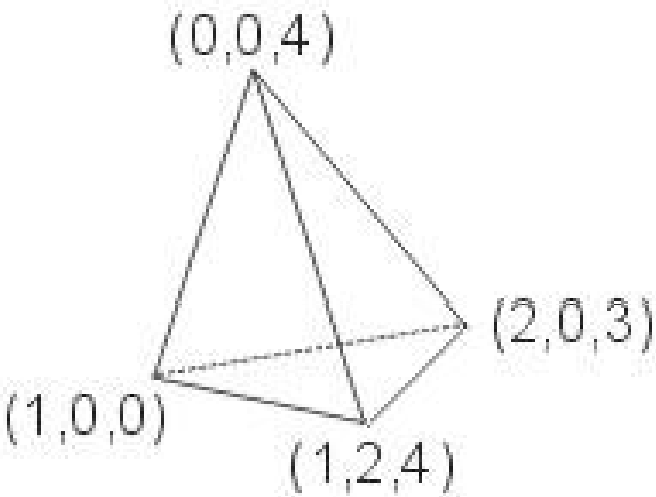
- Objetos curvos:
  - Mismas reglas que los objetos poliédricos.
  - Aristas y superficies curvas.
  - Representación:
    - Exacta: ecuaciones de curvas y superficies.
    - Aproximada: facetado.



Representación por frontera (B-Rep)

- Estructura de datos:
  - Contiene información topológica y geométrica.
  - Una base de datos relacional es un método adecuado para implementar esta estructura.
  - Por ejemplo:
    - Una entidad es un vertice
    - Una arista es representada por un par de vertices
    - Una cara por un conjunto de aristas cerradas

Representación por frontera (B-Rep)



B-Rep

CARAS	
V1	1
V2	4
V3	2
V1	2
V2	3
V3	1
V1	2
V2	4
V3	3
V1	3
V2	4
V3	1

VÉRTICES		
X	Y	Z
1	0	0
1	2	4
2	0	3
0	0	4

Representación por frontera (B-Rep)

- Operaciones de construcción:
  - Basadas en los operadores de Euler, aplicadas sobre la ecuación de Euler.

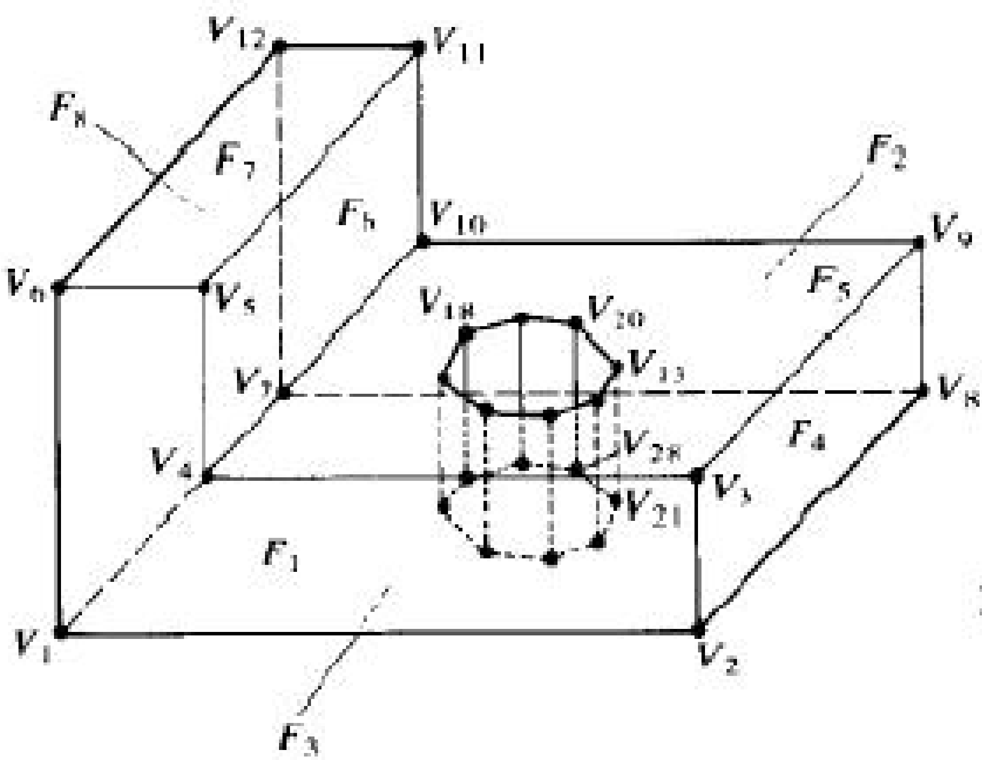
    $$F - E + V - L = 2\,(B - G)$$

  - No se pueden crear ni modificar libremente los objetos. Las operaciones han de cumplir siempre la ley de Euler.

Representación por frontera (B-Rep)

- Ventajas:
  - Popular, muy extendido.
  - Permite construir sólidos difíciles de modelar con primitivas básicas.
  - Fácil convertir B-rep a alámbrico.
- Desventajas:
  - Requiere mucho espacio de almacenamiento.
  - Trabajar con operadores de Euler es costoso y lento.

Representación por frontera (B-Rep)



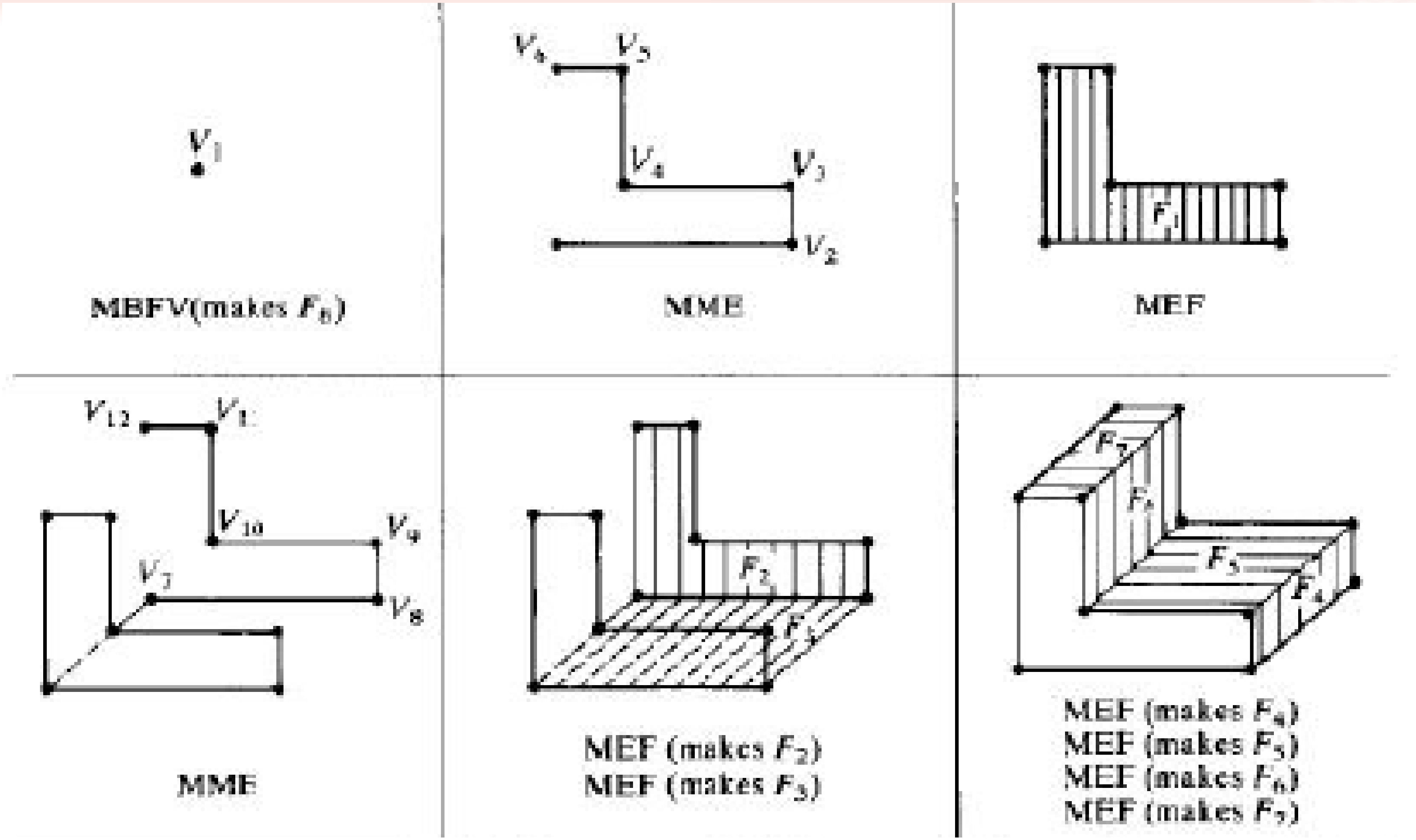
Faces F_9 to F_{16} for hole are not shown

$$F - E + V - L = 2\,(B - G)$$

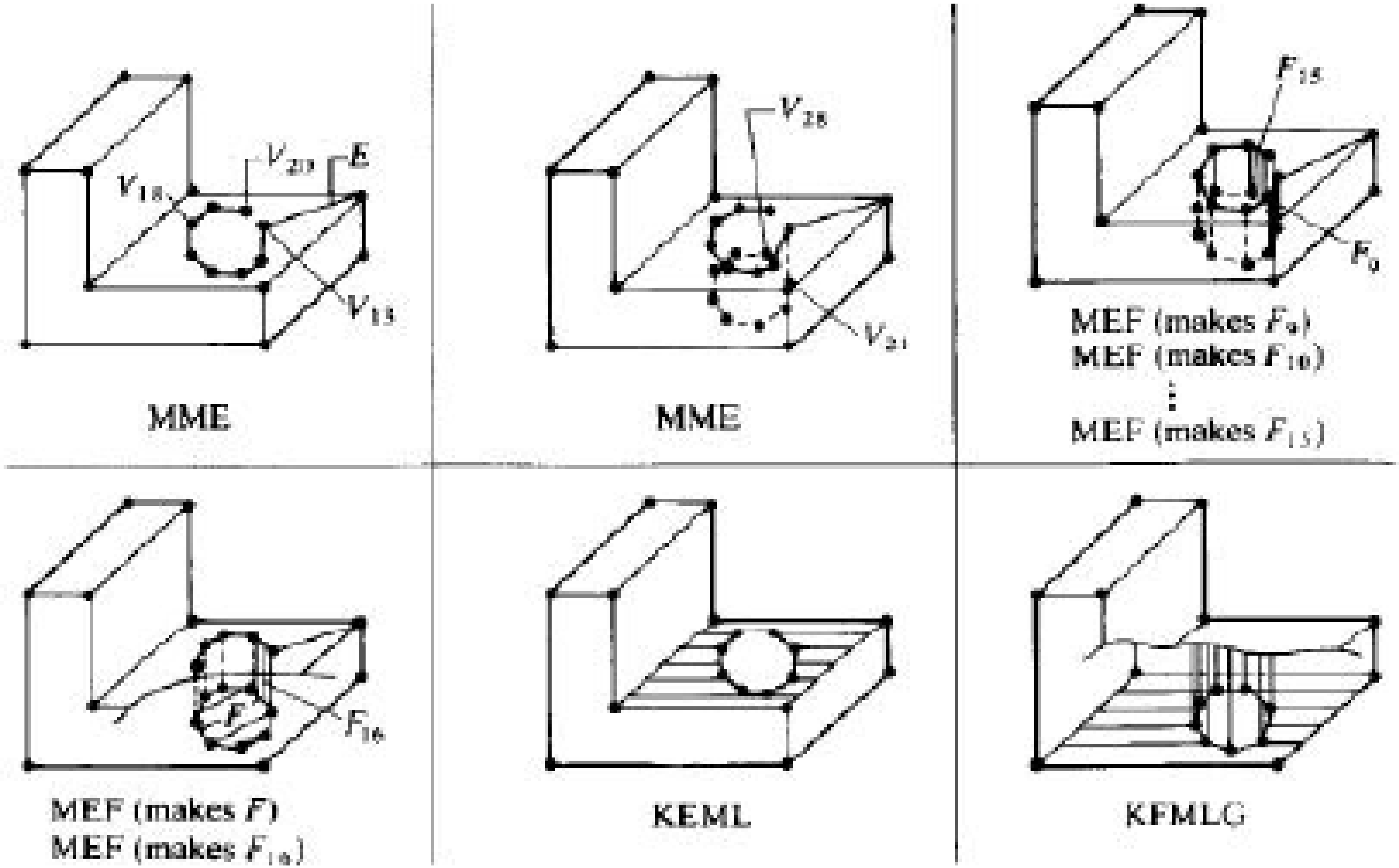
$$16 - 42 + 28 - 2 = 2\,(\,1 - 1)$$

Boundary model of solid *S*.

Representación por frontera (B-Rep)



Representación por frontera (B-Rep)



Geometría Sólido Constructiva (CSG).

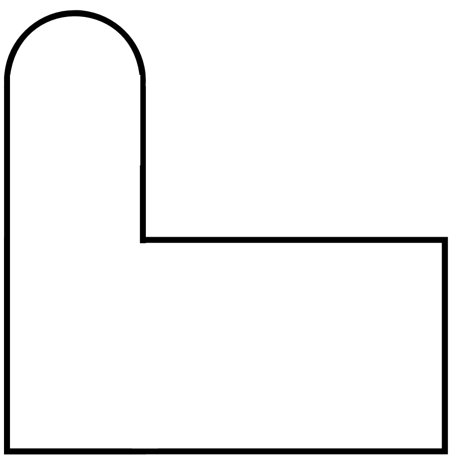
- CSG – Contructive solid geometry.
- Esquema más popular para crear modelos.
- Fácil de entender, crear y almacenar. Fácil de validar.
- Las operaciones de diferencia e intersección proporcionan mecanismos para:
  - Procesos de eliminación de material.
  - Cálculo de interferencia entre objetos.
- Basado en la noción topología de que un objeto puede dividirse en un conjunto de primitivas combinadas de cierta forma por un conjunto de reglas (operaciones booleanas) para formar dicho objeto.

Geometría Sólido Constructiva (CSG).

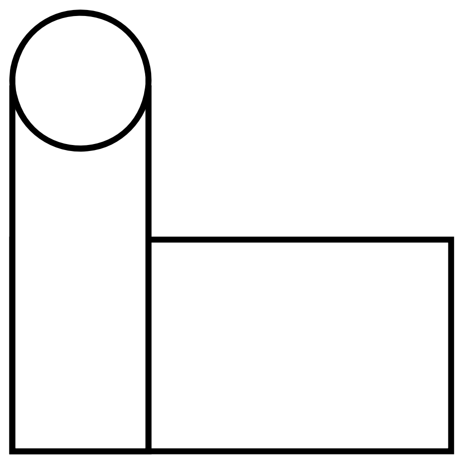
- Diferencias con B-rep:
  - No se almacenan explícitamente las caras, aristas y vértices. Estos se evalúan cuando es necesario.
  - Concepto de utilización de primitiva.
  - La validez de un modelo CSG se obtiene chequeando las primitivas y operaciones utilizadas.

Geometría Sólido Constructiva (CSG).

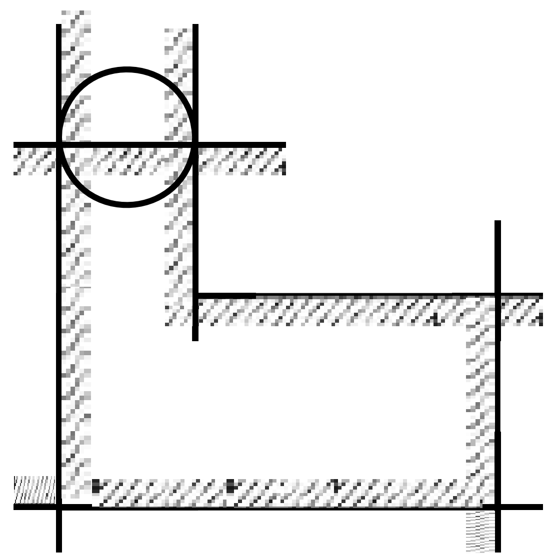
- Tipos de esquemas CSG:
  - Primitivas con fronteras (r-sets). Son los más conocidos y utilizados.
  - Primitivas sin fronteras (non r-sets) -> semiespacios.



Soli
do



Primitiva con fronteras
(B-rep)



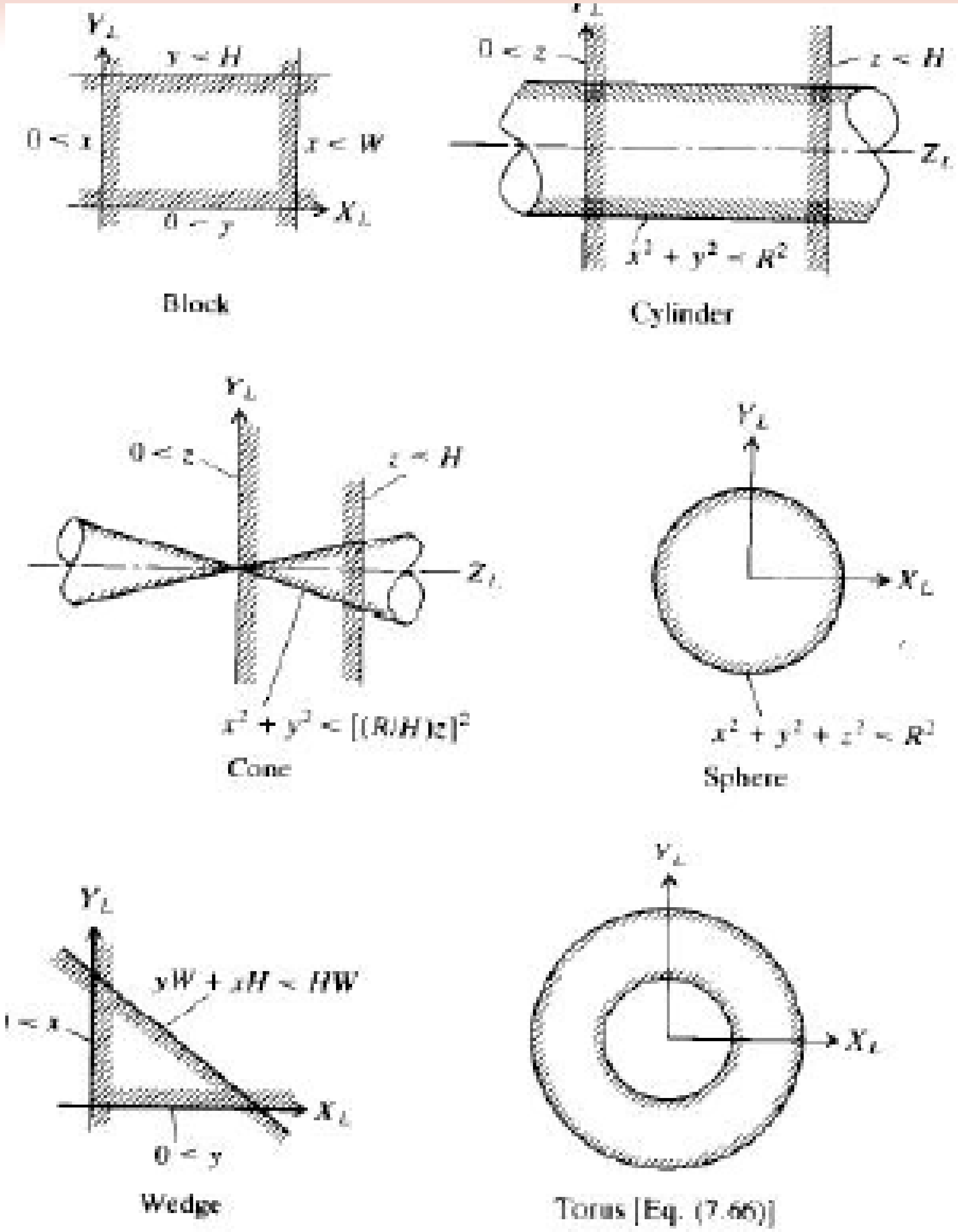
Primitiva sin fronteras
(B-rep)

Geometría Sólido Constructiva (CSG).

- Elementos básicos:
  - Bloque: $\{(x, y, z) / 0 < x < W, 0 < y < H, 0 < z < D\}$
  - Cilindro: $\{(x, y, z) / x^2 + y^2 < R^2, 0 < z < H\}$
  - Cono: $\{(x, y, z) / x^2 + y^2 < \left[(R/H)z\right]^2, 0 < z < H\}$
  - Esfera: $\{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 < R\}$
  - Toro:

$$\{(x, y, z) / (x^2 + y^2 + z^2 - R_2^2 - R_1^2) < 4R_2^2 (R_1^2 - z^2)\}$$

Geometría Sólido Constructiva (CSG).



Geometría Sólido Constructiva (CSG).

- Cada una de las primitivas anteriores es una combinación de un número finito de semi-espacios.
- La representación interna normalmente almacena también información útil para propósitos computacionales (caras, vértices, superficies, etc..)

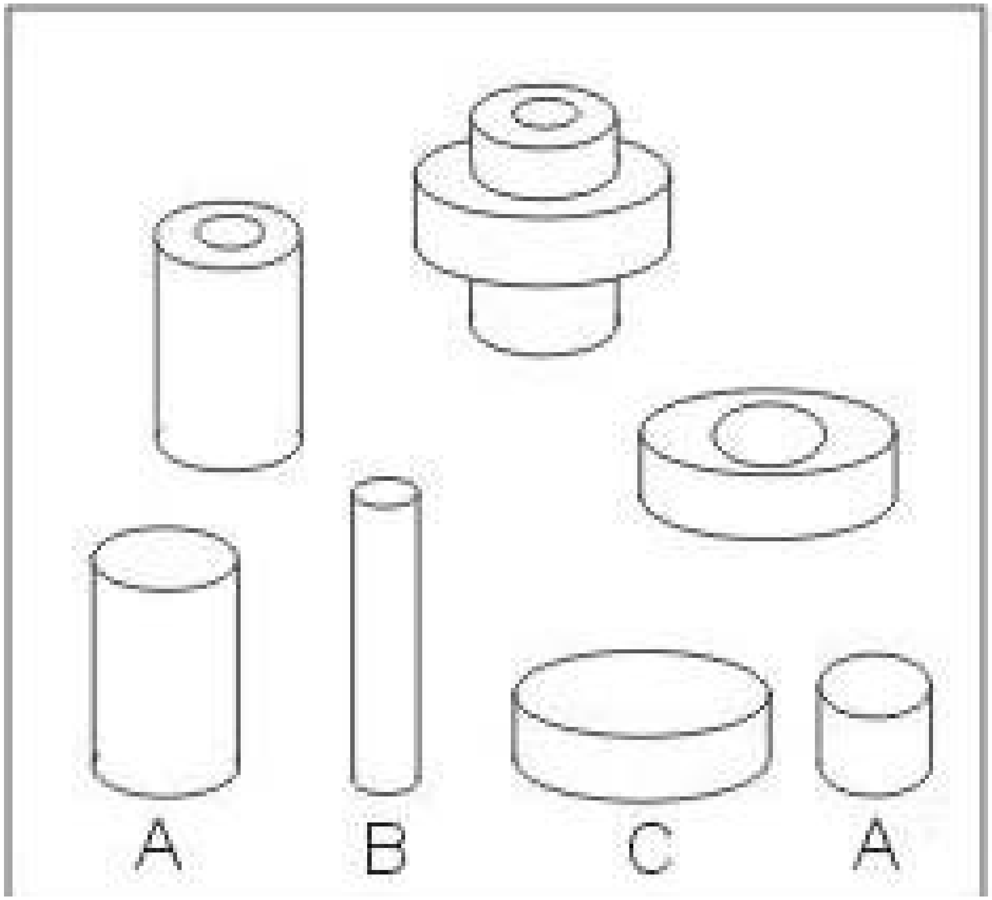
Geometría Sólido Constructiva (CSG).

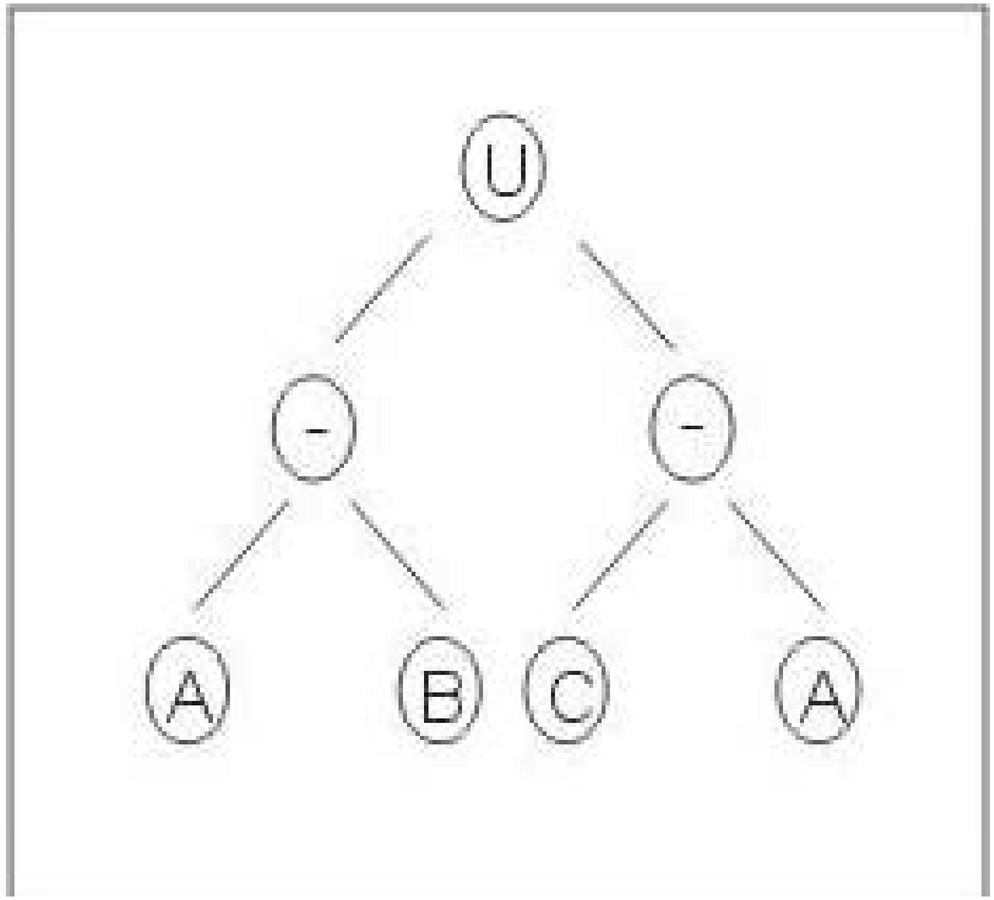
- Operaciones de construcción
  - $\cup$ ó + ⇨ Unión.
  - $\cap$ ó I ⇨ Intersección
  - \- ⇨ Diferencia.
- No están basadas en ninguna ley, la validación es a nivel de introducción de primitivas y en el concepto de cierre geométrico.
- Definición sencilla sólidos.
- Modelado y simulación de procesos de manufacturación (agujerear, cortar, interferencias y colisiones).

Geometría Sólido Constructiva (CSG).

- Esquema de representación potente.
  - Fácil de manejar por el usuario.
  - Poca memoria de almacenamiento.
  - Lento para visualización (CSG puede convertirse internamente a B-rep).

Geometría Sólido Constructiva (CSG).





Representación de barrido (sweep)

El desplazamiento de un área a lo largo de una trayectoria define un nuevo objeto, llamado barrido.

Dos tipos de desplazamientos:

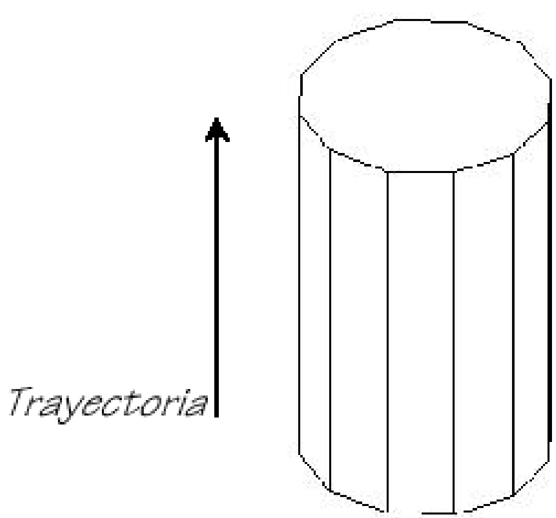
Desplazamiento traslacional o extrusión.

Un área bidimensional desplazado a lo largo de una trayectoria lineal, normal al plano del área, genera un volumen. Ejemplo. Un cilindro se puede definir a partir de una circunferencia, que sería su base.

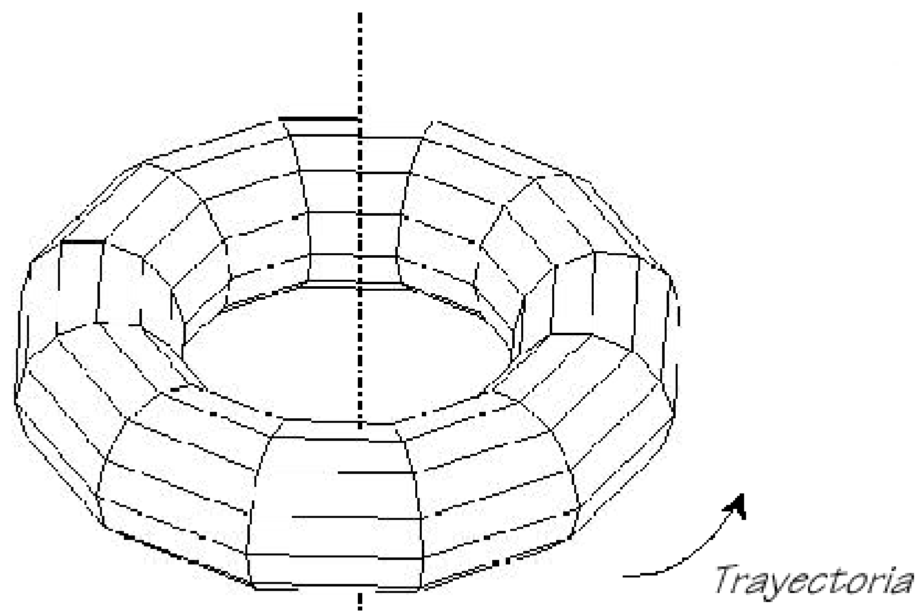
Representación de barrido (sweep)

Desplazamiento rotacional.

Rotación de un área respecto de un eje. De esta manera, se define un cilindro a partir de un rectángulo, tomando como eje de rotación uno de sus lados.



Barrido traslacional



Barrido rotacional

Representación de partición espacial

Dividen el espacio en un conjunto de celdas cúbicas (llamadas voxel. Contracción de las palabras inglesas "elemento de volumen").

– Dibujar un objeto no es más que estudiar si las celdas están ocupadas (total o parcialmente) o vacías.
– En función del grado de ocupación de las celdas, los métodos de ocupación espacial se diferencian en dos puntos fundamentales:

  ¿Cómo dividir el espacio?.

  ¿Qué hacer cuando se detecta una celda parcialmente ocupada?.

Representación de partición espacial

Método 1: Enumeración de ocupación espacial.

- Descompone la escena en un número prefijado de celdas idénticas dispuestas sobre una malla regular fija.
- El tipo más común de celda es el cubo y la representación del espacio como una matriz regular de cubos se denomina cuberil.
- Los objetos se codifican con una lista única y no ambigua de celdas ocupadas.
- No existe el concepto de ocupación parcial.

  Los objetos con superficies curvas sólo pueden aproximarse (falta de precisión).

Representación de partición espacial

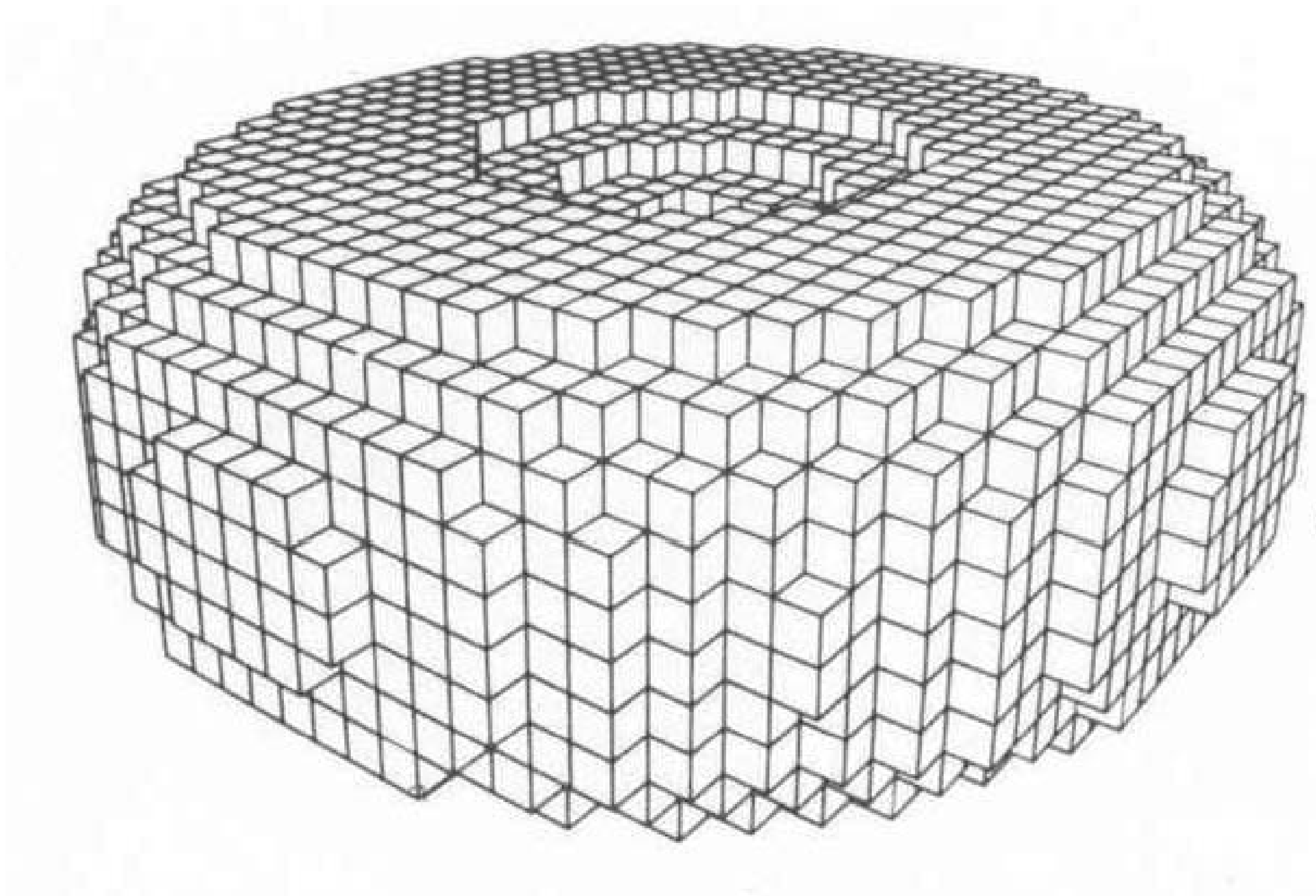
Método 1: Enumeración de ocupación espacial.

– Únicamente pueden representarse con exactitud objetos cuyas caras son paralelas a los lados del cubo (en el caso de que las celdas sean cubos) y cuyos vértices corresponden a la malla.

– Las celdas pueden ser tan pequeñas como se desee, ahora bien si aumenta el número de celdas que componen la malla también aumenta el espacio de almacenamiento.

Representación de partición espacial

Método 1: Enumeración de ocupación espacial



Representación de partición espacial

Método 2: Árboles de octantes (octree).

- Variante jerárquica de la enumeración de ocupación espacial, diseñada para optimizar sus exigentes requisitos de almacenamiento.
- Máxima: “Divide y vencerás.”
- Los árboles de octantes se derivan de los árboles de cuadrantes, un formato de representación bidimensional.
- Un árbol de cuadrantes se forma dividiendo sucesivamente un plano bidimensional en sus dos direcciones (X, Y) para formar cuadrantes.
- Cada cuadrante puede estar lleno, parcialmente lleno o vacío.

Representación de partición espacial

Método 2: Árboles de octantes (octree).

– Un cuadrante parcialmente lleno se subdivide recursivamente en subcuadrantes.

Este proceso de división continúa hasta que todos los cuadrantes sean homogéneos, bien llenos o vacíos (nivel de profundidad).

Si 4 cuadrantes hermanos están llenos o vacíos se eliminan y su padre se reemplaza por un nodo totalmente lleno o vacío.

Cualquier nodo parcialmente lleno en la profundidad límite se clasifica como lleno, con lo que tampoco existe el concepto de ocupación parcial, una vez alcanzado el nivel máximo de subdivisión.

Representación de partición espacial

Método 2: Árboles de octantes (octree).

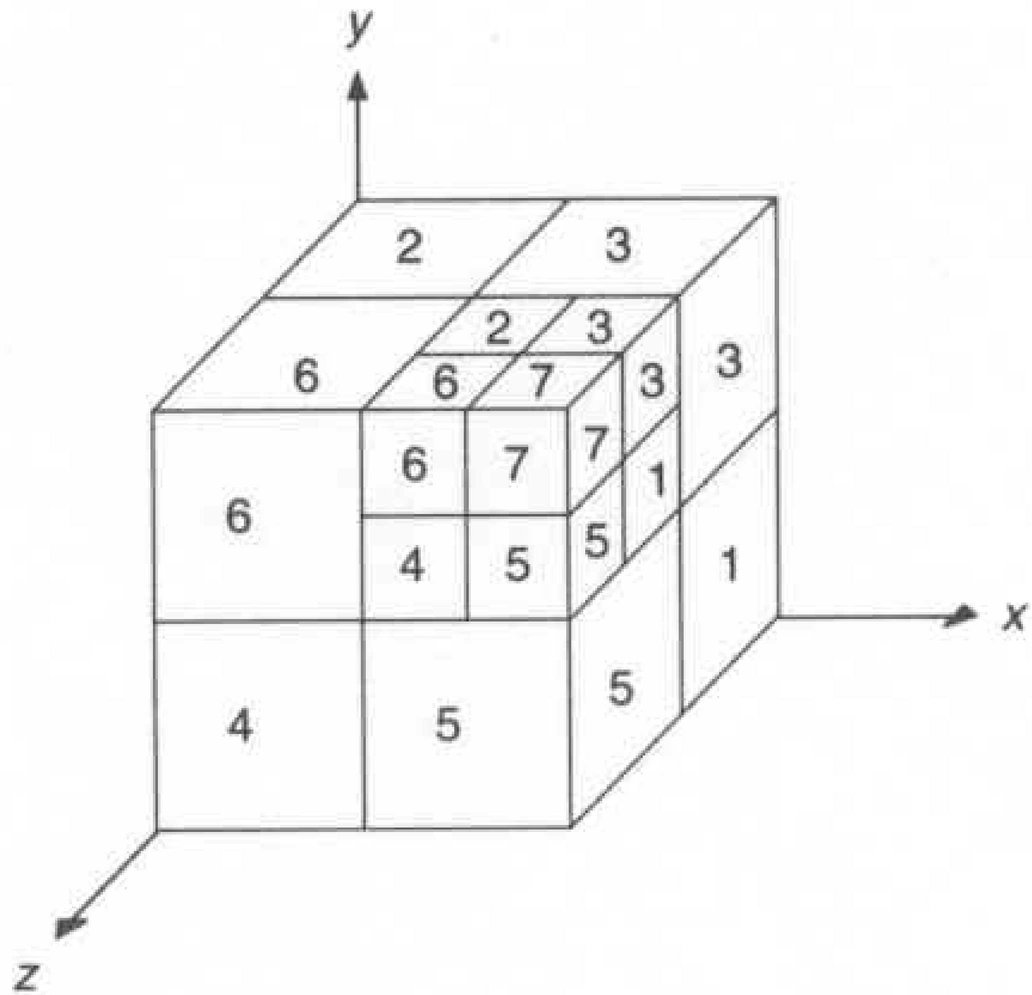
- La idea de los árboles de cuadrantes se generaliza de forma sencilla a tres dimensiones utilizando los árboles de octantes.

- El árbol de octantes es similar al de cuadrantes, excepto que aquel subdivide sus tres dimensiones. De esta forma, se obtiene una descomposición espacial con celdas de distintos tamaños, pudiendo realizarse una gestión más eficaz de la memoria.

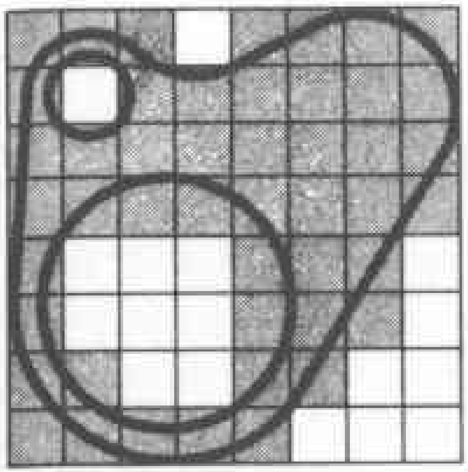
- Se puede demostrar que el número de nodos en una representación del árbol de octantes o de cuadrantes es proporcional a la superficie o al perímetro del objeto.

  La subdivisión de nodos surge exclusivamente por la necesidad de representar la frontera del objeto que se codifica.

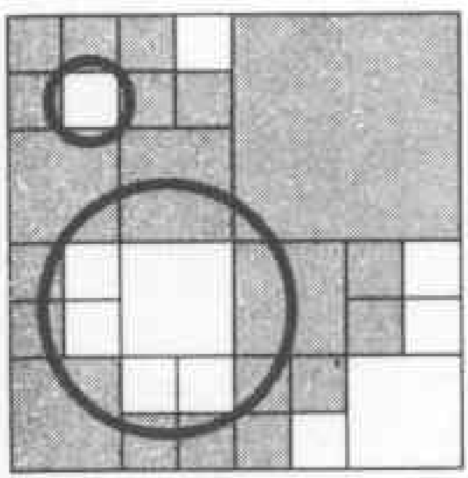
Representación de partición espacial



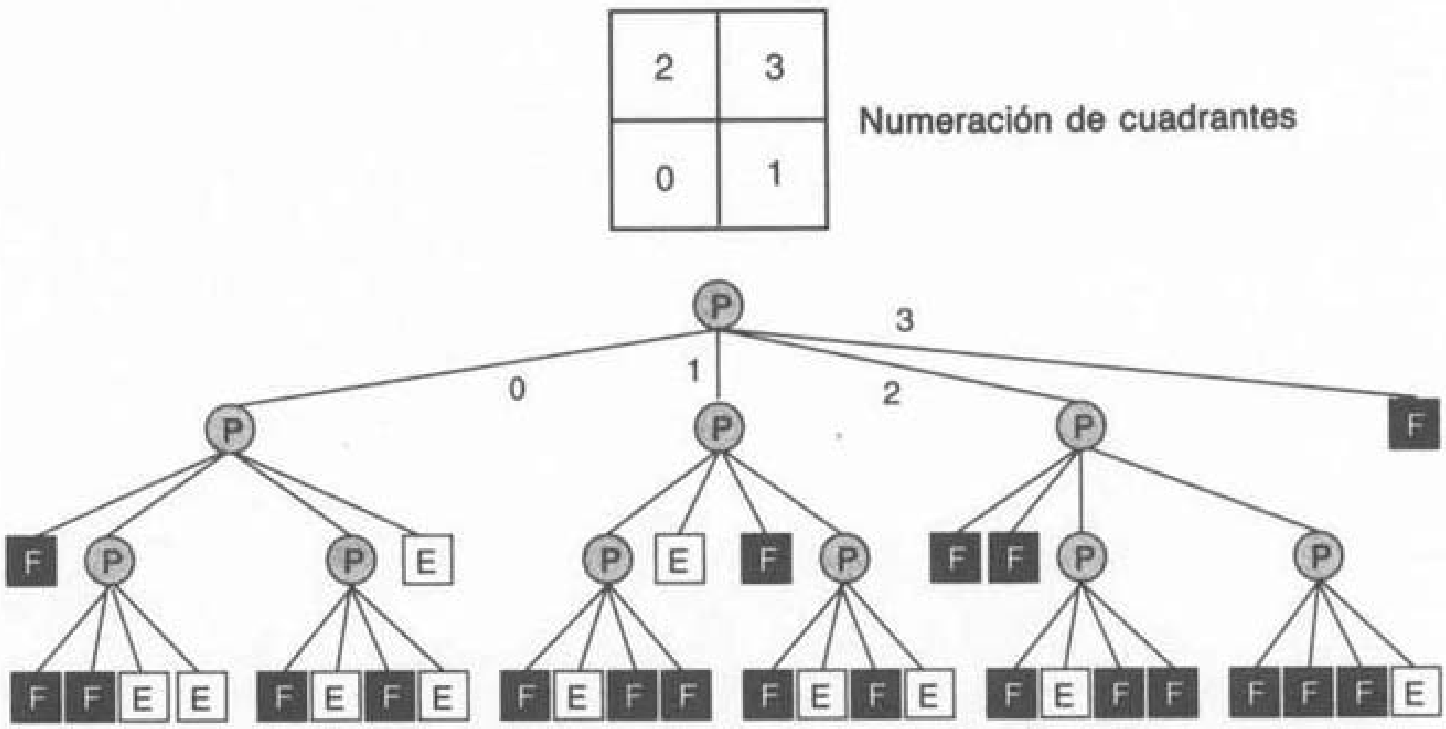
Representación de partición espacial



(a)



(b)



Binary Space Partitioning (BSP) tree