Problemario para CI2521: Estructuras Discretas I

Pedro R. Borges

Departamento de Computación y
Tecnología de la Información
Universidad Simón Bolívar

REPORTE CI–1994–001
Febrero 1994

Resumen

Se presenta una selección de problemas para el curso *Estructuras Discretas I* con una visión integradora de los tópicos cubiertos y que incluye ejercicios que trabajan con algunas de las estructuras y/o conceptos comunes en Ciencias de la Computación. Los tópicos incluidos son: Conjuntos y Familias, Naturales, Relaciones, Secuenciación y Clausuras, Relaciones de Orden, Relaciones de Equivalencia y Particiones, Funciones, Conjuntos Infinitos y Cardinalidad, y Algebras. En cada uno se incluyen las definiciones utilizadas en los ejercicios.

Abstract

We present a selection of problems for the *Estructuras Discretas I* course with an integrating view of the topics covered and including exercises which deal with some common structures and/or concepts in Computer Science. The topics included are: Sets and Families, Natural numbers, Relations, Sequencing and Closures, Order Relations, Equivalence Relations and Partitions, Functions, Infinite Sets and Cardinality, and Algebras. In each topic the used definitions are included.

Apartado Postal 89000, Caracas 1089-A – Teléfono: 906-3242 Fax: 906-3243
borges@usb.ve

Contenido

Capítulo 1

Introducción

Cuando se revisa la literatura sobre los tópicos cubiertos en el curso CI2521:Estructuras Discretas I, se hace evidente la diversidad de notaciones para el mismo concepto y la diversidad de conceptos para los cuales se utiliza la misma notación por distintos autores. Esto crea una verdadera "Torre de Babel" en el área —como también se plantea en [1]— que dificulta sobremanera el uso de esta literatura como referencia y/o como fuente de problemas para la ejercitación por parte de los estudiantes. Para solventar esta dificultad es conveniente proveer a los estudiantes de una selección amplia de problemas escritos con la terminología que se utiliza en el curso.

Desde hace varios años se han venido elaborando problemarios para el curso con la desventaja de que éste no se había estabilizado en cuanto a contenido, notación y otros aspectos, lo que dificultaba enormemente la reutilización de los problemarios. La estabilidad que parece haber alcanzado el curso desde la adopción del actual libro de texto ([2]), ha hecho posible la depuración del problemario que aquí se presenta.

La terminología y notación son las utilizadas en el curso actualmente. Sin embargo, para evitar ambigüedades y para que el problemario sea en lo posible autocontenido, se incluyen en cada capítulo las definiciones utilizadas. Para tratar de adaptar el problemario a distintos estilos de presentación de cada tópico, se proveen, para algunos conceptos, notaciones alternativas (e.g. $Img_R(A)$ y $Img(A, R)$ para denotar la imagen del conjunto A bajo la relación R) o definiciones equivalentes (e.g. $\{< x, y >\in R \mid x \in C\}$ y $R \cap (C \times Rg(R))$ para la relación $R\mid_{\text{izq}}C$). En algunos casos, cuando se tiene una definición equivalente a la presentada, pero lo suficientemente distinta como para que no sea evidente, se incluye como ejercicio probar la equivalencia (e.g. la propiedad $B \subseteq \mathrm{Rg}(f)$ y la propiedad $f \circ f^{-1} = Id_B$ para caracterizar la sobreyectividad de una función f de A en B).

Dos conceptos utilizados en el problemario sin ser definidos son el de *grafo* de una relación y el del conjunto Σ^* de las palabras finitas sobre un alfabeto Σ. Estos conceptos usualmente se definen un poco informalmente en el curso. El de grafo desde el punto de vista gráfico para dibujar las relaciones. El de Σ^* (y la operación de concatenación) para ejemplificar nociones como la de órdenes (en particular los órdenes lexicográfico y estándar) y de monoide, con una construcción (Σ^*) muy importante en Computación. Ambos conceptos están definidos en [2].

El temario seguido en el problemario es un subconjunto de los capítulos 2,3,4,6 y 7 del texto. Los cambios más notables son:

- En [2] se utiliza el símbolo $\subset$ para la relación de subconjunto (no necesariamente distinto). Por considerarla más común, en este problemario se utiliza el símbolo $\subseteq$ para la relación de subconjunto y $\subset$ para la de subconjunto distinto (subconjunto propio).

- Se agregan las operaciones de *imagen*, *preimagen*, y *restricción* de una relación.

- La relación *inversa* de R se denota R^{-1} en vez de R^c.

- En [2], contrariamente a la práctica común, el *dominio* de una relación de A en B es A, sin importar si todo elemento de A está involucrado en la relación. Para no diferir tanto del texto, en este caso, a sugerencia del Prof. Soler, no se modifica la noción de dominio de [2] sino que se introduce la noción de *dominio propio* ("Dop") como el conjunto de todas las primeras componentes de pares en la relación.

- En este problemario se utiliza el término *función* para denotar indistintamente a las funciones parciales o totales, a diferencia de [2], donde a menos que se especifique lo contrario, se denomina *función* exclusivamente a las funciones totales. Sin embargo, reservamos la notación $f : A \to B$ para las funciones totales (de A en B).

Algunos de los criterios tomados en cuenta para la inclusión de algunos ejercicios en el problemario son:

- Mostrar la integración de los tópicos entre sí. Es así como, por ejemplo, se incluyen ejercicios para estudiar el *Conjunto Parcialmente Ordenado* formado por las funciones de un conjunto en otro, donde la noción de *maximal* corresponde a la de función total.

- Aplicar algunos de los conceptos estudiados a construcciones relevantes en Computación. Este es el caso de los ejercicios que trabajan la cardinalidad del conjunto de programas en PASCAL y, como se mencionó anteriormente, el de los que trabajan sobre Σ^*.

- Destacar, en el caso específico de las *relaciones*, su poder para representar información en general, y el de las operaciones sobre relaciones para extraer parte de esa información o información implícita contenida en una relación (ver por ejemplo, los ejercicios 5 del capítulo 5 y 18 del capítulo 6).

Para no sobrecargar innecesariamente la presentación de los ejercicios y las definiciones, por lo general se omiten los cuantificadores más externos y se asume que las variables representan objetos del tipo adecuado a la forma en la que se emplean.

Muchos de los ejercicios que se incluyen fueron seleccionados y transcritos de distintas fuentes bibliográficas por los estudiantes Vanessa Alcócer, Jorge Combellas y Karam Masri. Algunos otros fueron adaptados de evaluaciones elaboradas para el curso en los últimos años o formulados especialmente para este problemario.

Capítulo 2

Conjuntos y Familias

Definiciones

- $A = B \iff \forall x$ (x $\in$ A $\iff$ x $\in$ B)
- $A \subseteq B \iff \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$
- $A \subset B \iff A \subseteq B \wedge A \neq B$
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- F es familia $\iff \forall A \in F(A$ es un conjunto $)$
- Sea C una familia, se define:

  La Unión de C como:

  $$\bigcup C = \bigcup_{S \in C} S = \{x \mid \exists S(S \in C \wedge x \in S)\} = \{x \mid \exists S \in C : x \in S\}$$

  Si C $\neq \emptyset$, la Intersección de C como:

  $$\bigcap C = \bigcap_{S \in C} S = \{x \mid \forall S(S \in C \Rightarrow x \in S)\} = \{x \mid \forall S \in C : x \in S\}$$

- $\mathsf{P}(A) = \{S \mid S \subseteq A\}$

Ejercicios

1. Sean:

$$A = \{\{3,2\}, 3, \{5,6,7\}, 8, 9\}$$
$$B = \{\{2,5,\}, 2, \{3,2\}, \{5,6,7\}, 9\}$$

   Calcular:

   (a) $A \cup B$
   (b) $A \cap B$
   (c) $A - B$

2. Sean $A = \{1,4,7,10\}, B = \{1,2,3,4,5\}$ y $C = \{2,4,6,8\}$. Calcule:

   (a) $A - B$
   (b) $A \cap (B \cup C)$
   (c) $(A \cap B) - C$
   (d) $(A \cup B) - (C - B)$

3. Indique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

   (a) $\{\mathrm{x}\} \subseteq \{\mathrm{x}\}$
   (b) $\{\mathrm{x}\} \in \{\mathrm{x}\}$
   (c) $\{\mathrm{x}\} \in \{\mathrm{x}, \{\mathrm{x}\}\}$
   (d) $\{\mathrm{x}\} \subseteq \{\mathrm{x}, \{\mathrm{x}\}\}$
   (e) $\emptyset \in \{\mathrm{x}\}$
   (f) $\emptyset \subseteq \{\mathrm{x}\}$

4. Indicar para cuáles de los siguiente conjuntos x es miembro, x es subconjunto ó x ni es miembro ni es subconjunto:

   (a) $\{\{x\}, y\}$
   (b) $\emptyset \cap \mathrm{x}$
   (c) $\{x\} - \{\{x\}\}$
   (d) $\{x\} \cup x$
   (e) $\{x\} \cup \{\emptyset\}$

   NOTA: Considere que x puede ser un conjunto.

5. Probar que la inclusión sobre conjuntos es reflexiva, antisimétrica y transitiva, esto es, probar lo siguiente:

   (a) $X \subseteq X$
   (b) $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \Rightarrow X = Y$

(c) $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$

6. Probar que la inclusión propia sobre los conjuntos es irreflexiva, asimétrica y transitiva, esto es, probar lo siguiente:

   (a) $X \not\subset X$

   (b) $X \subset Y \Rightarrow Y \not\subset X$

   (c) $X \subset Y \wedge Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z$

7. Demuestre que: $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \subset B \vee A = B$

8. Sean A, B, C tres conjuntos. Probar que:

   (a) $A \subseteq \emptyset \Longleftrightarrow A = \emptyset$

   (b) $A \subseteq B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

   (c) $A \subset B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subset C$

   (d) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \wedge C \subseteq A \Rightarrow A = B = C$

9. Sean P, Q, R conjuntos. Pruebe las siguientes propiedades:

   (a) Conmutatividad de la unión:

   $$P \cup Q = Q \cup P$$

   (b) Conmutatividad de la intersección:

   $$P \cap Q = Q \cap P$$

   (c) Asociatividad de la unión:

   $$P \cup (Q \cup R) = (P \cup Q) \cup R$$

   (d) Asociatividad de la intersección:

   $$P \cap (Q \cap R) = (P \cap Q) \cap R$$

   (e) Distributividad de la unión con respecto a la intersección:

   $$P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$$

   (f) Distributividad de la intersección con respecto a la unión:

   $$P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$$

   (g) Idempotencia de la unión:

   $$P \cup P = P$$

(h) Idempotencia de la intersección:

$$P \cap P = P$$

10. Pruebe que $\emptyset$ es el elemento neutro para la unión de conjuntos, esto es, que para todo conjunto X:
$$X \cup \emptyset = \emptyset \cup X = X$$

11. Pruebe que $\emptyset$ es el elemento absorbente para la unión de conjuntos, esto es, que para todo conjunto X:
$$X \cap \emptyset = \emptyset \cap X = \emptyset$$

12. Demuestre que: $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.

13. Se define la *diferencia simétrica* Δ de dos conjuntos como:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Demuestre que:

(a) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

(b) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

(c) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

(d) $A = B \iff A \Delta B = \emptyset$

(e) $A \Delta C = B \Delta C \Rightarrow A = B$

14. Pruebe que:

(a) $A \cup B = A \iff B \subseteq A$

(b) $A \cap B = B \iff B \subseteq A$

15. Sea el conjunto U el universo de trabajo,i.e., asuma que todos los conjuntos manejados son subconjuntos de U. Para todo conjunto X, se define el *complemento* de X, denotado $\overline{X}$, como:
$$\overline{X} = U - X$$

Demostrar:

(a) $A \subseteq B \iff \overline{B} \subseteq \overline{A}$

(b) $\overline{\overline{A}} = A$

(c) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

16. Pruebe que: si $X \cup Y = X$ para todo X, entonces $Y = \emptyset$.

17. Sea X un conjunto, demuestre la falsedad de la siguiente proposición:

$$X \cup Y = X \Rightarrow Y = \emptyset$$

NOTA: En el ejercicio anterior, la proposición que se demuestra verdadera es:

$$\forall Y((\forall X : X \cup Y = X) \Rightarrow Y = \emptyset)$$

mientras que la proposición cuya falsedad se pide demostrar en éste es:

$$\forall Y \forall X(X \cup Y = X \Rightarrow Y = \emptyset)$$

18. Calcular:

 (a) $\bigcup(\{\{a,b,c\},\{a,d,e\},\{a,f\}\})$
 (b) $\bigcap(\{\{a,b,c\},\{a,d,e\},\{a,f\}\})$

19. Sea C un círculo y sea D el conjunto de todos los diámetros ¿Qué es $\cap D$?.

20. Dadas A y B familias, con $A \cap B \neq \emptyset$, una de las siguientes proposiciones es falsa y la otra verdadera. Demuéstrelo.

 (a) $(\cap A) \cap (\cap B) \subseteq \cap(A \cap B)$
 (b) $\cap(A \cap B) \subseteq (\cap A) \cap (\cap B)$

21. Dadas A y B familias, demuestre que:

 (a) $\bigcup\{A\} = A$
 (b) $\bigcap\{A\} = A$
 (c) $A \subseteq B \Rightarrow \bigcap B \subseteq \bigcap A$
 (d) $A \subseteq B \iff \mathsf{P}(A) \subseteq \mathsf{P}(B)$
 (e) $\bigcup \mathsf{P}(A) = A$
 (f) $\bigcap \mathsf{P}(A) = \emptyset$
 (g) No es cierto que: $\mathsf{P}(A) \cup \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A \cup B)$

22. Sea F una familia. Demuestre que:

$$(\forall A \in F : A \subseteq B) \Rightarrow \bigcup F \subseteq B$$

23. Para todo A,B conjuntos, pruebe que:

$$\bigcup_{x \in A} (\{x\} - B) = (\bigcup_{x \in A} \{x\}) - B$$

24. Sea $\mathbb{N}^+$ el conjunto de los números naturales mayores que cero. Se define, para $i \in \mathbb{N}^+$:

$$M_i = \{i * k \mid k \in \mathbb{N}^+ \wedge k \geq 2\}$$

Determine:

$$\mathbb{N}^+ - \bigcup_{i=2}^{\infty} M_i$$

Capítulo 3

Naturales

Definiciones

- $\mathrm{suc}(C) = C \cup \{C\}$
- Definición inductiva de los Números Naturales:
  1. $\emptyset$ es un natural llamado *cero* ($0 = \emptyset$).
  2. Si n es un natural, entonces $\mathrm{suc}(n)$ es un natural.
  3. Si S es un conjunto de naturales tal que:
     (a) $0 \in S$
     (b) $\forall n \in S : \mathrm{suc}(n) \in S$

     Entonces S es el conjunto de todos los naturales ($\mathbb{N}$).
- $1 = \mathrm{suc}(0), 2 = \mathrm{suc}(1), 3 = \mathrm{suc}(2), \ldots$
- Para todo $n, m \in \mathbb{N}$, se definen las relaciones:

$$
\begin{aligned}
n \leq m &\Longleftrightarrow n \subseteq m \\
n \geq m &\Longleftrightarrow m \leq n \\
n < m &\Longleftrightarrow n \subset m \\
n > m &\Longleftrightarrow m < n
\end{aligned}
$$

- Se define la función $\mathrm{SUMA} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como:

$$
\begin{cases}
\mathrm{SUMA}(x, 0) = x + 0 = x \\
\mathrm{SUMA}(x, \mathrm{suc}(y)) = x + \mathrm{suc}(y) = \mathrm{suc}(x + y)
\end{cases}
$$

- Se define la función $\mathrm{MULT} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como:

$$
\begin{cases}
\mathrm{MULT}(x, 0) = x * 0 = 0 \\
\mathrm{MULT}(x, \mathrm{suc}(y)) = x * \mathrm{suc}(y) = x + (x * y)
\end{cases}
$$

Ejercicios:

1. Pruebe que:

   (a) $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \in \mathrm{suc}(n)$
   (b) $\forall n, m \in \mathbb{N}(m \in n \Rightarrow m \subseteq n)$
   (c) $\forall n, m \in \mathbb{N}(\mathrm{suc}(n) = \mathrm{suc}(m) \Rightarrow n = m)$
   (d) $\forall n \in \mathbb{N} : n \neq \mathrm{suc}(n)$
   (e) $\forall n \in \mathbb{N} : n \notin n$
   (f) $\forall n, m \in \mathbb{N}(n \in m \Rightarrow n \neq m)$
   (g) $\forall n, m \in \mathbb{N}(n \subset \mathrm{suc}(m) \Rightarrow n \subseteq m)$

2. Demuestre que la relación $<$ se puede definir también como equivalente a la relación de pertenencia, es decir:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n < m \iff n \in m)$$

3. Demuestre que:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}(n \leq m \lor m \leq n)$$

   y como corolario la llamada *tricotomía* de los naturales, i.e.:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n < m \lor m = n \lor m > n)$$

4. Demuestre que: $\forall n, m \in \mathbb{N}(n < m \iff \mathrm{suc}(n) < \mathrm{suc}(m))$

5. Definiremos el máximo y el mínimo entre 2 números naturales como:

$$MAX(n, m) = n \cup m$$

$$MIN(n, m) = n \cap m$$

   Para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$. Demuestre que:

   (a) $MAX(MAX(n, m), p) = MAX(n, MAX(m, p))$
   (b) $MIN(MIN(n, m), p) = MIN(n, MIN(m, p))$
   (c) $MIN(MAX(n, m), p) = MAX(MIN(n, p), MIN(m, p))$
   (d) $MAX(MIN(n, m), p) = MIN(MAX(n, p), MAX(m, p))$

6. Pruebe que: $\forall n \in \mathbb{N}(\mathrm{suc}(n) = n + 1)$

7. Para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$. Demuestre las propiedades de commutatividad y asociatividad de las operaciones de suma y multiplicación de naturales, esto es:

   (a) $m + n = n + m$
   (b) $m * n = n * m$

(c) $(m+n)+p = m+(n+p)$

(d) $(m*n)*p = m*(n*p)$

8. Pruebe la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma de naturales, esto es:

$$\forall m,n,p \in \mathbb{N}(m*(n+p) = (m*n)+(m*p))$$

9. Para todo $m,n,p,q \in \mathbb{N}$. Pruebe que:

(a) $(m \leq n) \wedge (n \leq m) \Rightarrow m = n$

(b) $(m \leq n) \wedge (n \leq p) \Rightarrow m \leq p$

(c) $m \leq m+n$

(d) $(m \leq n) \wedge (p \leq q) \Rightarrow m+p \leq n+q$

(e) $(m \leq n) \wedge (p \leq q) \Rightarrow m*p \leq n*q$

(f) $m+n = p \Rightarrow m \leq p$

(g) $m \leq n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : m+k = n$

10. Definimos el conjunto de números pares e impares de la siguiente forma:

$$PARES = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}(x = 2*n)\}$$

$$IMPARES = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}(x = 2*n+1)\}$$

Demuestre:

(a) $\forall x \in PARES(x+1 \in IMPARES)$

(b) $x \in PARES \wedge y \in IMPARES \Rightarrow (x+y) \in IMPARES$

(c) $x \in PARES \wedge y \in IMPARES \Rightarrow (x*y) \in PARES$

(d) $x \in PARES \wedge y \in PARES \Rightarrow (x+y) \in PARES$

(e) $x \in PARES \wedge y \in PARES \Rightarrow (x*y) \in PARES$

11. Demuestre que para todo $m,n \in \mathbb{N}$:

(a) $n*m = 0 \Rightarrow n = 0 \vee m = 0$

(b) $n*m = 1 \Rightarrow n = 1 \wedge m = 1$

(c) $n+m = 0 \Rightarrow n = 0 \wedge m = 0$

12. Demuestre que:

$$\forall n \in \mathbb{N}(\sum_{i=0}^{n} 2*i = n*(n+1))$$

13. Definamos el predecesor (pred) de un número natural por:

$$\begin{cases} \text{pred}(0) = 0 \\ \text{pred}(\text{suc}(n)) = n \end{cases}$$

Mediante el uso de predecesor, definamos la operación de resta entre números naturales como:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : a - b = \begin{cases} a & \text{si } b = 0 \\ \text{pred}(a - \text{pred}(b)) & \text{si } b > 0 \end{cases}$$

Construya contraejemplos para las siguientes proposiciones:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}(\text{suc}(\text{pred}(n)) = n)$

(b) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}((a + b) - c = a + (b - c))$

Para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$. Demuestre que:

(a) $\cup n = \text{pred}(n)$

(b) $a \neq 0 \Rightarrow \text{pred}(a) = a - 1$

(c) $a - a = 0$

(d) $a * (b - c) = a * b - a * c$

Demuestre que la relación $\leq$ corresponde a la noción "tradicional" de "es más pequeño", es decir:

$$a \leq b \Longleftrightarrow (b - a) \geq 0$$

14. Definamos la noción de potencia de un natural, denotada por m^n (la potencia n de m), como:

$$m^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ m * m^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Para todo $m, n, k \in \mathbb{N}$. Verifique y demuestre la veracidad de:

(a) $m^n * m^k = m^{k+n}$

(b) $(m^n)^k = m^{n*k}$

(c) $n \geq k \Longleftrightarrow m^n \geq m^k$

15. Se define inductivamente la función $f : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ por:

$$\begin{cases} f(0) = \mathbb{N} \\ f(\text{suc}(k)) = f(k) - \{k\} \end{cases}$$

Demuestre por inducción que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = \mathbb{N} - n$$

16. Demuestre que $< \mathbb{N}, \leq >$ no es un orden denso, es decir:

$$\nexists k \in \mathbb{N} : n < k < \mathrm{suc}(n)$$

17. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Se dice que $x \in A$ es el *mínimo* de A si $\forall z \in A : x \leq z$.

    Demuestre que $\mathbb{N}$ está bien ordenado por $\leq$, es decir:

$$\forall A \subseteq \mathbb{N} \text{ (} A \neq \emptyset \Rightarrow A \text{ tiene mínimo)}$$

    Sugerencia:

    (a) Suponga lo contrario:

$$\exists A \subseteq \mathbb{N} : A \neq \emptyset \wedge A \text{ } \textit{no} \text{ tiene mínimo}$$

    (b) Demuestre por inducción sobre x:

$$\forall x \in \mathbb{N}(\forall k \in \mathbb{N} : k < x \Rightarrow k \notin A)$$

    (c) Demuestre por reducción al absurdo:

$$\forall x \in \mathbb{N} : x \notin A$$

18. Usando el buen ordenamiento de los naturales, demuestre que si para todo natural n son ciertas las proposiciones:

    (a) $P(0)$
    (b) $(\forall k < n : P(k)) \Rightarrow P(n)$

    Entonces,

$$\forall m \in \mathbb{N} : P(m)$$

    Esto da lugar al llamado "Principio de Inducción Generalizada de los naturales", también llamado "Segundo Principio de Inducción en los naturales", el cual permite probar una proposición Q para todo natural mediante los pasos:

    (a) Probar $Q(0)$
    (b) Tomar como hipótesis inductiva $\forall k < n : Q(k)$, y demostrar $Q(n)$

Capítulo 4

Relaciones

Definiciones

- $< a, b >= \{\{a\}, \{a, b\}\}$
- $A \times B = \{< x, y >| \; x \in A \wedge x \in B\}$
- R es una *relación de* A *en* $B \iff R \subseteq A \times B$
- R es *sobre* $A \iff R$ es de A en A.
- $Dop(R) = \{x \mid \exists y :< x, y >\in R\}$
- $Rg(R) = \{y \mid \exists x :< x, y >\in R\}$
- $Campo(R) = Dop(R) \cup Rg(R) = \{x \mid \exists y(< x, y >\in R\vee < y, x >\in R)\}$
- Si $R \subseteq A \times B$:

  $$Dom(R) = A$$
  $$Codom(R) = B$$

  Si no se especifican los conjuntos asociados a R:

  $$Dom(R) = Dop(R)$$
  $$Codom(R) = Rg(R)$$

- $R^{-1} = \{< x, y >|< y, x >\in R\}$
- $R \mid_{izq} (C) = \{< x, y >\in R \mid x \in C\} = R \cap (C \times Rg(R))$
- $R \mid_{der} (C) = \{< x, y >\in R \mid y \in C\} = R \cap (Dop(R) \times C)$
- $Img(C, R) = Img_R(C) = Rg(R \mid_{izq} C) = \{y \mid \exists x \in C :< x, y >\in R\}$

- $PreImg(C,R) = PreImg_R(C) = Dop(R\mid_{der}(C)) =$
$$\{x \mid \exists y \in C :< x, y >\in R\}$$

- R es *Reflexiva* en $A \iff$
$$\forall x \in A :< x, x >\in R$$

- R es *Irreflexiva* en $A \iff$
$$\forall x \in A :< x, x >\notin R$$

- R es *Simétrica* en $A \iff$
$$\forall x, y \in A(< x, y >\in R \Rightarrow < y, x >\in R)$$

- R es *Asimétrica* en $A \iff$
$$\forall x, y \in A(< x, y >\in R \Rightarrow < y, x >\notin R)$$

- R es *Antisimétrica* en $A \iff$
$$\forall x, y \in A(< x, y >\in R \wedge < y, x >\in R \Rightarrow x = y)$$

- R es *Transitiva* en $A \iff$
$$\forall x, y, z \in A(< x, y >\in R \wedge < y, z >\in R \Rightarrow < x, z >\in R)$$

- $Id_A = \{< x, x >\mid x \in A\}$.

Ejercicios

1. Demuestre que: $< a, b >=< c, d >\iff a = c \wedge b = d$

2. Sean A, B, C, D conjuntos, demuestre que:

   (a) $A \times B = B \times A \iff (A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B)$

   (b) $A \neq \emptyset \wedge A \times B \subseteq A \times C \Rightarrow B \subseteq C$

   (c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

   (d) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

   (e) $(A \times B) \cap (B \times C) = A \times C \iff$
   $A = \emptyset \vee C = \emptyset \vee (A \subseteq B \wedge C \subseteq B)$

   (f) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

3. Para cada una de las siguientes relaciones sobre A, dibuje el grafo asociado:

(a) $\{<x,y>|\ 2 \leq x,y \leq 7 \wedge x \text{ divide a } y\}$, donde

$$A = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n < 10\}$$

(b) $\{<x,y>|\ 0 \leq x-y < 3\}$, donde $A = \{0,1,2,3,4\}$

(c) $\{<x,y>|\ x < y \vee\ x \text{ es primo}\}$, donde $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

4. Sea $A = \{1,2,3\}$. Encuentre todas las relaciones binarias sobre A.

5. Sean G, H relaciones, demuestre que:

   (a) $Dop(G \cup H) = Dop(G) \cup Dop(H)$

   (b) $Dop(G \cap H) \subseteq Dop(G) \cap Dop(H)$

   (c) $Dop(G) - Dop(H) \subseteq Dop(G - H)$

6. Si R es una relación, pruebe que:

$$Campo(R) = \bigcup(\bigcup(R))$$

7. Sea la siguiente relación:

$$G = \{(1,4),(2,5),(2,3),(3,5),(1,2),(2,2)\}$$

   Calcule:

   (a) $Dop(G), Rg(G)$

   (b) $G\ |_{izq}\ (\{2\}), G\ |_{\text{izq}}(\{2,1\}), G\ |_{\text{izq}}(\{2,1,5\})$

   (c) $G\ |_{der}\ (\{5\}), G\ |_{\text{der}}(\{5,2\}), G\ |_{\text{der}}(\{5,2,1\})$

   (d) $Img_G(\{2\}), Img_G(\{2,1\}), Img_G(\{2,1,5\})$

   (e) $PreImg_R(\{5\}), PreImg_G(\{5,2\}), PreImg_G(\{5,2,1\})$

8. Pruebe que: $PreImg(C,R) = Img(C,R^{-1})$

9. Sean R, H relaciones, demuestre que:

   (a) $(R^{-1})^{-1} = R$

   (b) $(R \cup H)^{-1} = R^{-1} \cup H^{-1}$

10. Si G es una relación y $x \in Dop(G)$, pruebe que:

$$G\ |_{izq}\ \{x\} = (G^{-1}\ |_{der}\ \{x\})^{-1}$$

11. Sean A, B conjuntos y R una relación. Demuestre que:

    (a) $Img_R(A \cup B) = Img_R(A) \cup Img_R(B)$

    (b) $Dop(R) \cap A \subseteq PreImg_R(Img_R(A))$

12. Sean A y B conjuntos y R una relación. Demuestre la veracidad o falsedad de las proposiciones:

   (a) $Img_R(A) \cap Img_R(B) \subseteq Img_R(A \cap B)$

   (b) $Img_R(A \cap B) \subseteq Img_R(A) \cap Img_R(B)$

13. Sobre el conjunto SH de todos los seres humanos se define la relación:

$$CONOCE\_A = \{< x, y >| \ x \text{ conoce a } y \ \}$$

   Note que esta relación es simétrica. Dados x, y personas, indique de qué forma calcular los siguientes conjuntos:

   (a) Todos los conocidos de x.

   (b) Todos los conocidos comunes a x y a y.

   (c) Los conocidos de x, que no conozcan a y.

   (d) El conjunto de personas que no conozcan ni a x ni a y.

14. Sea R la relación definida sobre $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, tal que:

$$R = \left\{ \begin{array}{c} < a, a >, < a, b >, < b, a >< b, d >, \\ < a, d >, < e, e >, < g, f >, < f, g > \end{array} \right\}$$

   Determine el subconjunto H de A más grande en el cual se cumple que:

   (a) R es reflexiva en H.

   (b) R es irreflexiva en H.

   (c) R es simétrica en H.

   (d) R es asimétrica en H.

   (e) R es transitiva en H.

   (f) R es antisimétrica en H.

15. Determine si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas para los casos $R = \emptyset$ y $R = Id_A$:

   (a) R es reflexiva en A.

   (b) R es irreflexiva en A.

   (c) R es simétrica en A.

   (d) R es antisimétrica en A.

   (e) R es asimétrica en A.

   (f) R es transitiva en A.

   Considere los casos $A = \emptyset$ y $A \neq \emptyset$.

16. Encuentre 3 relaciones $R1, R2, R3$ sobre $\mathbb{N}$ tal que:

    (a) $R1$ sea reflexiva y simétrica pero no transitiva.

    (b) $R2$ sea reflexiva y transitiva pero no simétrica.

    (c) $R3$ sea simétrica y transitiva pero no reflexiva.

17. Determine cuáles de las siguientes relaciones definidas sobre el conjunto de los números naturales tiene cada una de las propiedades de reflexividad, simetría, asimetría, antisimetría y transitividad.

    Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, m está relacionado con n si y sólo si:

    (a) m es divisible por n.

    (b) $m + n$ es multiplo de 3.

    (c) $m + n \geq 50$.

    (d) m es mayor que n.

18. Sean R y S relaciones sobre A, probar que:

    (a) R es reflexiva en $A \Rightarrow Dop(R) = Rg(R)$.

    (b) R es asimétrica en $A \Rightarrow R$ es irreflexiva (en A).

    (c) R es asimétrica en $A \Rightarrow R$ es antisimétrica (en A).

    (d) R es transitiva e irreflexiva en $A \Rightarrow R$ es asimétrica (en A).

19. Sea R una relación sobre A. Pruebe que:

    (a) R es reflexiva en $A \Longleftrightarrow Id_A \subseteq R$.

    (b) R es irreflexiva en $A \Longleftrightarrow R \cap Id_A = \emptyset$.

    (c) R es simétrica en $A \Longleftrightarrow R = R^{-1}$.

    (d) R es asimétrica en $A \Longleftrightarrow R \cap R^{-1} = \emptyset$.

    (e) R es antisimétrica en $A \Longleftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq Id_A$.

20. Se dice que una relación R es *circular* sobre A si:

    $$\forall x, y, z, \in A : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow zRx$$

    Demostrar que:

    $$R \text{ es reflexiva y circular } \Longleftrightarrow R \text{ es reflexiva, simétrica y transitiva}$$

21. Los siguientes argumentos pretenden probar que toda relación simétrica y transitiva es tambien reflexiva:

Sea R una relación simétrica y transitiva. Como R es simétrica:

$$< x, y >\in R \Rightarrow < y, x >\in R$$

luego, como R es transitiva:

$$< x, y >\in R \wedge\ < y, x >\in R \Rightarrow < x, x >\in R$$

Por lo tanto, R es reflexiva.

¿ Cuál es el error de esta argumentación?

22. Sean R, S relaciones definidas sobre un conjunto A. Considere las siguientes operaciones:

    - $R \cup S$
    - $R \cap S$
    - $R - S$
    - $(A \times A) - R$

    Determine cuáles operaciones preservan las propiedades:

    (a) reflexividad.
    (b) irreflexividad.
    (c) simetría.
    (d) asimetría.
    (e) antisimetría.
    (f) transitividad.

    suponiendo en cada caso que R y S originalmente cumplen con las propiedades antes enumeradas. Ejemplo: Si R y S son simétricas entonces $R \cup S$ es simétrica ?.

Capítulo 5

Secuenciación y Clausuras

Definiciones

- $R \cdot S = \{< x, y >|\ \exists z(< x, z > \in R \wedge < z, y > \in S)\}$.
- $R \circ S = S \cdot R$
- Si R es una relación sobre A:

$$\begin{cases} R^0 = Id_A \\ R^{n+1} = R^n \cdot R \end{cases}$$

- Si R es una relación sobre A , la *clausura reflexiva* de R, $r(R)$, es la relación que cumple:

  1. $r(R)$ es *reflexiva*.
  2. $R \subseteq r(R)$.
  3. R' es *reflexiva* $\wedge R \subseteq R' \Rightarrow r(R) \subseteq R'$.

  Análogamente se definen la *clausura simétrica* $s(R)$ y la *clausura transitiva* $t(R)$.

- $R^+ = t(R)$.
- $R^* = tr(R)$.

Ejercicios

1. Sea R una relación ¿En qué casos $R \cdot R = R$?
2. Sean R, S, G, H relaciones, demuestre o dé un contraejemplo de las siguientes proposiciones:

   (a) $(R \cdot S)^{-1} = S^{-1} \cdot R^{-1}$

(b) $Id_{Dop(R)} \subseteq R^{-1} \cdot R$

(c) $Id_{Rg(R)} \subseteq R \cdot R^{-1}$

(d) $R^{-1} \cdot R = Id_{Dop(R)}$

(e) $R \cdot R^{-1} = Id_{Rg(R)}$

(f) $R \cdot R^{-1} = Id_{Campo(R)}$

3. Pruebe que:

(a) $Img_S(Img_R(C)) = Img_{R \cdot S}(C)$

(b) $PreImg_S(PreImg_R(C)) = PreImg_{S \cdot R}(C)$

4. Construya grafos de relaciones R1 y R2 tales que:

- $R1 \cdot R2 = R2 \cdot R1$.
- $R1 \cdot R2 \neq R2 \cdot R1$.

5. Sea SH el conjunto de todos los seres humanos, y $Masc$ y Fem los subconjuntos de SH correspondientes a hombres y mujeres, respectivamente.

Sea la relación $Es\_Progenitor$ definida sobre SH tal que

$$x \; Es\_Progenitor \; y \iff x \text{ es progenitor (padre o madre) de } y$$

Seleccione, para cada una de las siguientes 5 expresiones en lenguaje natural, cuál es su expresión formal correspondiente de las 10 listadas abajo (a–j):

i.- Los hijos (tanto varones como hembras) de una persona dada p

ii.- La relación Es_Abuel sobre SH donde

$$x \; Es\_Abuel \; y \iff x \text{ es abuelo (o abuela) de } y$$

iii.- La relación Es_Hija sobre SH donde

$$x \; Es\_Hija \; y \iff x \text{ es hija } (\textit{OJO:}\ \text{hij}\underline{\textbf{a}}) \text{ de } y$$

iv.- Los hermanos varones de una persona dada p

v.- Los tíos y tías de una persona dada p

(a) $Es\_Progenitor^2$

(b) $Es\_Progenitor \,|_{\text{izq}}(Fem)$

(c) $\text{PreImg}_{Es\_Progenitor}(\{p\})$

(d) $Masc \; - \; \text{Img}(\{p\}, Es\_Progenitor^{-1} \cdot Es\_Progenitor)$

(e) $Es\_Progenitor^{-1} \,|_{\text{izq}}(Fem)$

(f) $\text{Img}_{(Es\_Progenitor^{-1})^2 \cdot Es\_Progenitor}(\{p\}) \; - \; \text{Img}_{Es\_Progenitor^{-1}}(\{p\})$

(g) $\operatorname{Img}(\{p\}, Es\_Progenitor)$

(h) $(Es\_Progenitor^{-1})^2$

(i) $\operatorname{Img}_{Es\_Progenitor^{-1} \cdot Es\_Progenitor^2}(\{p\}) \ - \ \operatorname{Img}_{Es\_Progenitor^{-1}}(\{p\})$

(j) $(\operatorname{Img}(\{p\}, Es\_Progenitor^{-1} \ \cdot \ Es\_Progenitor) - \{p\}) \ \cap \ Masc$

6. Sean R, S relaciones arbitrarias sobre el conjunto A. Pruebe o dé un contrajemplo de las siguientes proposiciones:

   (a) R, S son reflexivas $\Rightarrow R \cdot S$ es reflexiva.

   (b) R, S son irreflexivas $\Rightarrow R \cdot S$ es irreflexiva.

   (c) R, S son simétricas $\Rightarrow R \cdot S$ es simétrica.

   (d) R, S son asimétricas $\Rightarrow R \cdot S$ es asimétrica.

   (e) R, S son antisimétricas $\Rightarrow R \cdot S$ es antisimétrica.

   (f) R, S son transitivas $\Rightarrow R \cdot S$ es transitiva.

7. Demuestre que:

   (a) R es transitiva $\Longleftrightarrow R^2 \subseteq R$.

   (b) R es reflexiva $\Rightarrow R \subseteq R^2$.

8. Dados un conjunto A no vacío y una relación R sobre A, se tienen las dos siguientes proposiciones:

   Proposición 1: $R^2 = R$,

   Proposición 2: R es reflexiva y transitiva (en A).

   Para las dos implicaciones

   Proposición 1 $\Rightarrow$ Proposición 2

   Proposición 2 $\Rightarrow$ Proposición 1

   muestre que una de ellas es verdadera y la otra es falsa.

9. Sea R una relación sobre A. Demuestre que:

   (a) $R^n \cdot R^m = R^{n+m}$

   (b) $(R^n)^m = R^{m*n}$

10. Sean R y S relaciones sobre A. Demuestre que:

$$\forall n \in \mathbb{N}(R^n \subseteq (R \cup S)^n)$$

   (Sugerencia: utilice inducción sobre n)

11. Demuestre que para toda relación R sobre A:

(a) $\mathrm{r}(R) = R \cup Id_A$
(b) $\mathrm{s}(R) = R \cup R^{-1}$
(c) $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$
(d) $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$

12. Sean R, S relaciones sobre un conjunto A , tal que $R \subseteq S$. Pruebe que:

    (a) $\mathrm{r}(R) \subseteq \mathrm{r}(S)$
    (b) $\mathrm{s}(R) \subseteq \mathrm{s}(S)$
    (c) $\mathrm{t}(R) \subseteq \mathrm{t}(S)$

13. Sea R una relación sobre A. Pruebe que:

    (a) $\mathrm{rs}(R) = \mathrm{sr}(R)$
    (b) $\mathrm{rt}(R) = \mathrm{tr}(R)$
    (c) $\mathrm{st}(R) \subseteq \mathrm{ts}(R)$

14. Si R es una relación, dé contraejemplos para las siguientes proposiciones:

    (a) R es una relación transitiva $\Rightarrow \mathrm{s}(R)$ es transitiva.
    (b) Si R está definida sobre un conjunto finito: $\mathrm{st}(R) = \mathrm{ts}(R)$.

15. Demuestre que: $R \cdot R^* = R^+$

16. Se ha creado una red de chismes a través del correo electrónico de la Universidad de Leensborough el cual sólo transmite una vez por día, al final del mismo. De este modo, los mensajes enviados en un día son recibidos al día siguiente. Es obligatorio para todos los estudiantes leer su correo diariamente.

    Considerando esta red, podemos definir la relación R sobre el conjunto E de estudiantes como:

    $$aRb \iff a \text{ le chismea todo a } b \text{ (a través de la red)}$$

    A continuación se le pide obtener una serie de conjuntos de estudiantes. Usted debe dar en cada caso una expresión para calcularlos mediante operaciones sobre relaciones y conjuntos.

    (a) Sea $X \subseteq E$. Acaba de ocurrir un suceso del cual sólo los miembros de X se han enterado. ¿ Quiénes se enterarán al día siguiente ?
    (b) En la misma situación, ¿ Quiénes terminarán sabiendo que dicho suceso ocurrió ?
    (c) Se define la relación "curruña" sobre E como:

    $$a \text{ es curruña de } b \iff aRb \wedge bRa$$

    Encuentre el conjunto $C(x) = \{z \in E \mid x \text{ es curruña de } z\}$.

17. Sean R y S relaciones sobre A.

    (a) Demuestre que: $t(R) \cup t(S) \subseteq t(R \cup S)$
    (Sugerencia: utilice lo demostrado en el ejercicio 10)

    (b) Dé un ejemplo que muestre que la relación anterior puede ser de subconjunto propio, es decir, un caso en el cual:

    $$t(R) \cup t(S) \subset t(R \cup S)$$

18. Sea $S = \{S_1, S_2, ..., S_n\}$ un conjunto de procedimientos. Definamos la relación $\rightarrow$ sobre S como:

    $$S_i \rightarrow S_j \iff S_i \text{ llama a } S_j$$

    Algunos de los procedimientos de S son recursivos si el grafo $< S, \rightarrow^+ >$ contiene ciclos dirigidos de longitud mayor que cero.

    Tomemos $S = \{A, B, C, D, E\}$ y suponga:

    - A llama a B y E
    - B llama a C
    - C llama a E
    - D llama a C
    - E llama a B

    Determine si el conjunto S contiene procedimientos recursivos.

Capítulo 6

Relaciones de Orden

Definiciones

- R es un *orden parcial* en $A \iff R$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva en A.

  Al par $< A, R >$ se le llama Conjunto Parcialmente Ordenado o CPO.

- Si $< A, \leq >$ es un CPO:

  - La relación de *orden estricto* ($<$) asociada a $< A, \leq >$ se define como:

    $$\forall x, y \in A (x < y \iff x \leq y \wedge x \neq y)$$

  - La relación de *precedencia inmediata* ($\underset{i}{<}$) o *relación de Hasse* asociada a $< A, \leq >$ se define como:

    $$\forall x, y \in A (x \underset{i}{<} y \iff x \leq y \wedge \nexists c : x \leq c \leq y)$$

    El *diagrama de Hasse* asociado a $< A, \leq >$ es el grafo de la relación $\underset{i}{<}$. Usualmente se asume que los arcos están dirigidos "hacia arriba".

- R es *cuasi-orden* en $A \iff R$ es transitiva e irreflexiva en A.

- R es un *orden total* o *lineal* en $A \iff R$ es orden parcial en A y

  $$\forall x, y \in A : < x, y > \in R \vee < y, x > \in R$$

- R es un *orden topológico* de $< A, \leq > \iff R$ es un orden lineal en A y

  $$\forall x, y \in A (x \leq y \Rightarrow xRy)$$

- Si $< A, \leq >$ es un CPO, y $B \subseteq A$:

$$\begin{aligned}
\text{Minimales}(B) &= \{x \in B \mid \forall b \in B (b \leq x \Rightarrow x = b)\} \\
&= \{x \in B \mid \nexists b \in B : b < x\} \\
\text{Maximales}(B) &= \{x \in B \mid \forall b \in B (x \leq b \Rightarrow x = b)\} \\
&= \{x \in B \mid \nexists b \in B : y < b\} \\
\text{Mínimo}(B) &= x \Longleftrightarrow x \in B \wedge \forall b \in B : x \leq b \\
\text{Máximo}(B) &= x \Longleftrightarrow x \in B \wedge \forall b \in B : b \leq x \\
\text{Minorantes}(B) &= \{x \in A \mid \forall b \in B : x \leq b\} \\
&= \text{Cotas_inferiores}(B) \\
\text{Mayorantes}(B) &= \{x \in A \mid \forall b \in B : b \leq x\} \\
&= \text{Cotas_superiores}(B) \\
\text{Inf}(B) &= \text{Máximo}(\text{Minorantes}(B)) \\
\text{Sup}(B) &= \text{Mínimo } (\text{Mayorantes}(B))
\end{aligned}$$

- R es un *buen orden* en $A \Longleftrightarrow R$ es un orden total en A y

$$\forall B \subseteq A (B \neq \emptyset \Rightarrow B \text{ tiene mínimo})$$

Ejercicios

1. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y H la relación asociada al diagrama de Hasse del CPO $< A, R >$ donde:

$$H = \{< a, b >, < e, a >, < d, a >, < c, f >, < b, f >, < a, c >\}$$

   Dibuje el grafo asociado a R y halle todos los ordenamientos topológicos del CPO.

2. Sea A un conjunto no vacío:
   (a) ¿ Es $< A, \emptyset >$ un CPO?.
   (b) ¿ Bajo cuáles condiciones es $< A, A \times A >$ un CPO?.

3. Demuestre que, en el CPO $< A, R >$ con precedencia inmediata $\underset{i}{<}$, se tiene que:

$$x \underset{i}{<} y \Longleftrightarrow < x, y > \in (R - Id_A) - (R - Id_A)^2$$

4. Sea $< A, \leq >$ un CPO y $x, y \in A$. Demuestre que:
   (a) $x \leq y \Longleftrightarrow \text{Inf}(\{x, y\}) = x$
   (b) $x \leq y \Longleftrightarrow \text{Sup}(\{x, y\}) = y$

5. Considere el CPO $< \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}, R >$ cuya relación de Hasse H es:

$$H = \left\{ \begin{array}{l} < c, a >, < d, b >, < e, c >, < f, c >, < f, d >, < i, e >, \\ < i, f >, < h, e >, < g, f >, < j, h >, < j, g > \end{array} \right\}$$

Para $B = \{c, e, f\}$, halle:

(a) Maximales(B).

(b) Minimales(B).

(c) Máximo(B).

(d) Mínimo(B).

(e) Mayorantes(B).

(f) Minorantes(B).

(g) Sup(B).

(h) Inf(B).

6. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y H la relación de Hasse del CPO $< A, R >$, con

$$H = \left\{ \begin{array}{l} < d, b >, < b, a >, < e, b >, < g, e >, \\ < g, c >, < g, f >, < c, a > \end{array} \right\}$$

(a) Dibuje el diagrama de Hasse asociado al CPO $< A, R >$.

(b) Use la parte superior de la diagonal de la siguiente tabla para indicar los valores del supremo del conjunto $\{x, y\}$ en $< A, R >$ y la parte inferior de la misma para indicar los valores del ínfimo del conjunto $\{x, y\}$, tomando como valor de x el rótulo al inicio de la fila y como valor de y el rótulo al inicio de la columna.

	a	b	c	d	e	f
a						
b						
c						
d						
e						
f						

(c) Halle, si existen, el Máximo y el Mínimo del CPO $< A, R >$.

(d) Halle Maximales(A) y Minimales(A) en el CPO $< A, R >$.

7. Sea el conjunto de 4 elementos $A = \{a, b, c, d\}$. Se tiene un CPO $< A, R >$ que cumple con las siguientes restricciones:

- Hay sólo un minimal en A.
- Hay sólo dos maximales en A, uno de los cuales es a.

- El conjunto $\{b, c\}$ no está mayorado, es decir, Mayorantes$(\{b, c\}) = \emptyset$.
- El ínfimo entre a y b, formalmente Inf$(\{a, b\})$, existe y no es el minimal de A.

En base a ello:

(a) Dibuje el diagrama de Hasse de R.

(b) Dé el grafo de R.

8. Construya ejemplos de los siguientes conjuntos:

   (a) Un orden lineal no vacío en el cual algunos subconjuntos no tengan Mínimo.

   (b) Un orden parcial no vacío que no sea un orden lineal y en el cual algunos subconjuntos no tengan Máximo. Construya ejemplos finitos e infinitos.

   (c) Un orden parcial que tenga un único elemento maximal y no tenga Máximo.

   (d) Un orden parcial que tenga un número infinito de elementos maximales y un solo elemento minimal.

9. Sea R un orden parcial en A. Demuestre que R es total si y solo si $R \cup R^{-1} = A \times A$.

10. Dados los siguientes conjuntos ordenados:

    - $< \mathbb{N}, < >$
    - $< \mathbb{N}, \leq >$
    - $< \mathbb{Z}, \leq >$
    - $< \mathbb{R}, \leq >$
    - $< \mathsf{P}(\mathbb{N}), \subset >$
    - $< \mathsf{P}(\mathbb{N}), \subseteq >$
    - $< \mathsf{P}(\emptyset), \subseteq >$

    determine, en cada caso, si es:

    (a) cuasi ordenado.

    (b) parcialmente ordenado.

    (c) linealmente ordenado.

    (d) bien ordenado.

11. Sea R una relación sobre un conjunto A y $B \subseteq A$. Definamos la relación R' sobre B como:

$$R' = R \cap (B \times B)$$

    Determine la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

    (a) R es un orden parcial en A $\Rightarrow R'$ es un orden parcial en B.

(b) R es un cuasi orden en A $\Rightarrow R'$ es un cuasi orden en B.

(c) R es un orden lineal en A $\Rightarrow R'$ es un orden lineal en B.

(d) R es un buen orden en A $\Rightarrow R'$ es un buen orden en B.

12. Demuestre que, dados un CPO $< A, R >$ y $B \subseteq A$:

    (a) Si existe el Mínimo de B, es único.

    (b) Si B tiene Máximo entonces tiene un único elemento maximal.

    (c) Si B tiene Máximo entonces tiene Supremo.

    (d) Si B es finito entonces tiene al menos un elemento maximal y uno minimal.

    (e) Si $b \in$ Mayorantes(B) y $b \in B$, entonces $b =$ Máximo(B).

13. Pruebe que:

    (a) En un conjunto linealmente ordenado, todo minimal de un subconjunto es tambien un Mínimo y todo maximal es tambien un Máximo.

    (b) Todo subconjunto finito de un conjunto linealmente ordenado tiene Mínimo y Máximo.

14. Sea A un conjunto no vacío, y sea OPA el conjunto de los Ordenes PArciales sobre A. Considere el CPO $< OPA, \subseteq>$ (La relación $\subseteq$ es la relación de inclusión de conjuntos).

    (a) Demuestre que los órdenes totales son los elementos maximales.

    (b) ¿Quién es el Mínimo?.

    (c) ¿ Cómo son los $R \in$ OPA tales que $Id_A \underset{i}{<} R$?

    (d) ¿ Bajo cuáles condiciones existe el Máximo de $< OPA, \subseteq>$?.

15. Sea $< A, \leq>$ un CPO finito. Sea $\sqsubseteq$ la relación binaria sobre $A \times A$ definida por:

$$< a, b > \sqsubseteq < c, d > \Longleftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$$

    (a) Demuestre que $< A \times A, \sqsubseteq>$ es un CPO.

    (b) Si $M = \{M_1, \ldots, M_p\}$ y $m = \{m_1, \ldots, m_q\}$ son los maximales y minimales de $< A, \leq>$ respectivamente, ¿ Cuáles son los maximales y minimales de $< A \times A, \sqsubseteq>$?. Demuéstrelo.

    (c) ¿ Bajo cuáles condiciones $< A \times A, \sqsubseteq>$ tiene máximo ?. ¿ Quién es ?.

16. Sea $< A, \leq>$ un CPO. Se tienen las siguientes definiciones alternativas de la relación $\sqsubseteq$ sobre $A \times A$:

    - $< x_1, y_1 > \sqsubseteq < x_2, y_2 > \Longleftrightarrow x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$.
    - $< x_1, y_1 > \sqsubseteq < x_2, y_2 > \Longleftrightarrow x_1 \leq x_2$.

- $< x_1, y_1 > \sqsubseteq < x_2, y_2 > \Longleftrightarrow (x_1 < x_2) \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)$.

Determine para cada una de las definiciones anteriores, si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. En cada caso demuéstrelo.

(a) $\leq$ es un orden parcial en A $\Rightarrow \sqsubseteq$ es un orden parcial en $A \times A$.

(b) $\leq$ es un orden lineal en A $\Rightarrow \sqsubseteq$ es un orden lineal en $A \times A$.

(c) $\leq$ es un buen orden en A $\Rightarrow \sqsubseteq$ es un buen orden en $A \times A$.

17. Sea $< A, R >$ un CPO con relación de precedencia inmediata H dada por:

$$H = \{< b, a >, < d, b >, < d, c >, < c, a >, < c, e >\}$$

Dé todos los órdenes topológicos del CPO.

18. Un viajero debe visitar las capitales de todos los estados de Venezuela obedeciendo las siguientes restricciones:

- Debe visitar Caracas primero.
- Debe visitar Maracaibo en último lugar.
- Debe visitar Maracay antes que San Juan de los Morros.
- Debe visitar Puerto Ordaz antes que San Juan de los Morros.
- Debe visitar Ciudad Bolívar antes que Puerto Ordaz.
- No puede visitar Barinas antes de visitar Valencia.
- Debe visitar Barinas después de Ciudad Bolívar y antes de Barcelona.

Usted debe:

(a) Dar un modelo matemático de la situación.

(b) Indicar, en el modelo, cómo hallar un posible itinerario para el viajero.

19. Sea $\mathbb{Q}^*$ el conjunto de los números racionales no negativos. Sea $\leq$ la relación usual en números. Note que $< \mathbb{Q}^*, \leq >$ es un conjunto linealmente ordenado.

(a) Demuestre que $< \mathbb{Q}^*, \leq >$ no es bien ordenado, es decir, encuentre un subconjunto no vacío de $\mathbb{Q}^*$ que no tenga mínimo.

(b) Encuentre un predicado P para el universo $\mathbb{Q}^*$ que muestre que el Segundo Principio de Inducción usando $\leq$ no es una regla de inferencia válida en $\mathbb{Q}^*$.

Capítulo 7

Relaciones de Equivalencia y Particiones

Definiciones

- R es una *relación de equivalencia* en $A \iff R$ es reflexiva, simétrica y transitiva en A.

- La familia Π es una partición de $A \neq \emptyset \iff$

  1. $\forall S \in \Pi : S \subseteq A \wedge S \neq \emptyset$
  2. $\forall S, T \in \Pi : S = T \vee S \cap T = \emptyset$
  3. $\bigcup \Pi = A$

  Los elementos de Π se denominan *bloques*.

- Si R es de equivalencia en A:

  $$[x]_R = \{y \in A \mid xRy\}$$
  $$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

  $[x]_R$ es la *clase de equivalencia* de x bajo R. A/R es el *conjunto cociente* de A bajo R y es también la *partición* de A *inducida* por R, denotada Π_R.

- Si π es una partición de $A \neq \emptyset$, la *relación de equivalencia* R_π sobre A *inducida por* π se define por:

  $$xR_\pi y \iff \exists S \in \pi \, (x \in S \, \wedge \, y \in S)$$

- Dadas particiones π_1 y π_2 de un conjunto A, se dice que π_1 es un *refinamiento* de π_2 o que π_1 es *más fina* que π_2 si y solo si:

  $$\forall S \in \pi_1 (\exists T \in \pi_2 : S \subseteq T)$$

- La relación $\equiv_k$ sobre $\mathbb{Z}$, con $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ se define como:

$$a \equiv_k b \Longleftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z} : \ a - b = z * k$$

Si $a \ \equiv_k \ b$ se dice que a es *congruente* con b *módulo* k y tambien se escribe: $a \equiv b \pmod{k}$.

Ejercicios

1. Sea R una relacion de equivalencia en A y $x, y \in A$, pruebe que:
   (a) $[x]_R = [y]_R \Longleftrightarrow xRy$
   (b) $[x]_R = [y]_R \vee [x]_R \cap [y]_R = \emptyset$
   (c) $\bigcup(A/R) = A$

2. Muestre que la única relación de equivalencia sobre un conjunto A que satisface la propiedad de antisimetría es Id_A.

3. Sean $R1$ y $R2$ relaciones de equivalencia sobre el conjunto A.
   (a) ¿ Es la secuenciación de R1 con R2 una relación de equivalencia?. ¿Por qué?.
   (b) Muestre que:

$$R1 \cdot R2 \text{ es de equivalencia} \Rightarrow R1 \cdot R2 = R2 \cdot R1$$

4. (a) Pruebe que $\equiv_k$ es una relación de equivalencia.
   (b) Describa $\mathbb{Z}/\equiv_2$,$\mathbb{Z}/\equiv_3$ y $\mathbb{Z}/\equiv_4$.
   (c) Si $k \geq n$, ¿ Cuántas clases tiene $\mathbb{Z}/\equiv_k$?. ¿Cuál es la clase de k ?.
   (d) Pruebe que: $k_1 \equiv 0 \pmod{k_2} \Longleftrightarrow k_1$ es múltiplo de k_2

5. Sea F una familia en la cual todos sus miembros son relaciones de equivalencia sobre A. Demuestre o dé un contraejemplo de las siguientes proposiciones.
   (a) ¿Es $\cap A$ una relación de equivalencia en A?
   (b) ¿Es $\cup A$ una relación de equivalencia en A?

6. Sean R y S relaciones de equivalencia en A y $x, y \in A$, pruebe que:
   - $[x]_{R \cap S} = [x]_R \cap [x]_S$
   - Si $R \cup S$ es de equivalencia: $[x]_{R \cup S} = [x]_R \cup [x]_S$

7. Sean R_1 y R_2 relaciones de equivalencia no vacías sobre A. Determine cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia sobre A. De no serlo dé un contraejemplo para cada caso.
   (a) $(A \times A) - R_1$

(b) $R_1 - R_2$

(c) R_1^2

(d) $r(R_1 - R_2)$

(e) $R_1 \cdot R_2$

8. Sea R una relación que no es de equivalencia. Dé un procedimiento sistemático para extender R y convertirla en una relación de equivalencia.

9. Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Demuestre que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 0 : R^n = R$$

10. Sean R y S relaciones de equivalencia sobre $A \neq \emptyset$ tales que $R \subseteq S$ y elementos $a, b \in A$. Demuestre que:

$$b \in [a]_S \Rightarrow [a]_R \cup [b]_R \subseteq [a]_S$$

11. Sea R una relación sobre el conjunto A:
Decimos que hay un *camino* de x a y en R si y solo si:

$$x = y \vee < x, y > \in R \vee$$

$$\exists a_1, a_2, ..., a_n \in A \mid < x, a_1 >, < a_1, a_2 >, ..., < a_n, y > \in R$$

(a) Sea S la relación sobre A definida por:

$$< x, y > \in S \iff \text{ Existe un camino de } x \text{ a } y \text{ en } R$$

Probar que S es reflexiva y transitiva.

(b) Sea la relación T sobre A, definida por:

$$< x, y > \in T \iff < x, y > \in S \wedge < y, x > \in S$$

Probar que T es una relación de equivalencia.

(c) Sea la relación U sobre A/T definida por:

$$< C_1, C_2 > \in U \iff$$

$$\exists x, y \in A (x \in C_1 \wedge y \in C_2 \wedge < x, y > \in S)$$

Probar que U es una relación de orden parcial.

12. Sea A un conjunto no vacío y REQ el cojunto de las Relaciones de EQuivalencia sobre A, es decir:

$$\text{REQ} = \{R \subseteq A \times A \mid R \text{ es de equivalencia en } A\}$$

(a) Considere el CPO $< \text{REQ}, \subseteq >$ para $A = \{a, b, c, d\}$.

   i. Dibuje el diagrama de Hasse.

   ii. Para cada elemento R de REQ, dé Π_R.

(b) Considere el CPO $< \text{REQ}, \subseteq >$ para cualquier A con al menos dos (2) elementos. Demuestre que, si $B = \text{REQ} - \{A \times A\}$ y $R \in B$ es tal que:

$$\exists x, y \in A(\ [x]_R \neq [y]_R \wedge \forall z \in A(z \in [x]_R \vee z \in [y]_R)\ )$$

entonces R es maximal de B.

13. Si $A \neq \emptyset$, ¿ Es $\{A\}$ una partición de A?.

14. Halle todas las particiones de $A = \{a, b, c\}$.

15. Demuestre que, efectivamente, A/R es una partición de A y que R_π es de equivalencia.

16. Demuestre que: $R_\Pi = R \Longleftrightarrow \Pi_R = \Pi$

17. Sean π_1 y π_2 particiones del conjunto $A \neq \emptyset$. Para los siguientes conjuntos:

    (a) $\pi_1 \cap \pi_2$.

    (b) $\pi_1 \cup \pi_2$.

    (c) $\pi_1 - \pi_2$.

    (d) $[\pi_1 \cap (\pi_2 - \pi_1)] \cup \pi_1$.

    Determine:

    - Cuáles son particiones de A.
    - Cuáles podrían ser particiones de A.
    - Cuáles no podrían ser particiones de A.

    En cada caso justifique su respuesta.

18. Sean $F1$ y $F2$ familias. Se define el *Techo* de $F1$ sobre $F2$ como:

$$\text{Techo}(F1, F2) = \{S \in F1 \mid \exists T \in F2 : T \subseteq S\}$$

    (a) Dadas $\pi_1 = \{\{a, b, c, d\}, \{e, f\}\}$ y $\pi_2 = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, e, f\}\}$ particiones de $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, calcule el Techo(π_1, π_2) y el Techo(π_2, π_1).

    (b) Demuestre que, si $R1$ y $R2$ son relaciones de equivalencia sobre A entonces: $R1 \subseteq R2 \Rightarrow A/R2 = \text{Techo}(A/R2, A/R1)$

19. Demuestre que la relación de refinamiento de particiones es una relación de orden parcial, es decir, que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

20. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y PART el conjunto de las PARTiciones de A, es decir:

$$\text{PART} = \{\pi \mid \pi \text{ es partición de } A\}$$

Considere el CPO $<$ PART, "más fina" $>$.

(a) Dibuje el diagrama de Hasse.

(b) Para cada elemento de PART, dé la relación de equivalencia inducida en A.

(c) Compare con el diagrama del CPO $<\text{REQ}, \subseteq>$ del ejercicio 12a.

21. Sean P y Q dos predicados y R_1, R_2 y R_3 relaciones de equivalencia sobre A definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{<x, y>\mid \mathrm{P}(x, y)\} \\ R_2 &= \{<x, y>\mid \mathrm{P}(x, y) \ \wedge \ \mathrm{Q}(x, y)\} \\ R_3 &= \{<x, y>\mid \mathrm{P}(x, y) \ \vee \ \mathrm{Q}(x, y)\} \end{aligned}$$

(a) ¿ Es A/R_2 un refinamiento de A/R_1 ?.

(b) ¿ Es A/R_3 un refinamiento de A/R_1 ?.

En ambos casos justifique su respuesta.

22. Demuestre que, para todo $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{Z}/\equiv_{k_1} \text{ es un refinamiento de } \mathbb{Z}/\equiv_{k_2} \Longleftrightarrow k_1 \text{ es múltiplo de } k_2$$

23. Sean π_1 y π_2 particiones de $A \neq \emptyset$. Sean R_{π_1} y R_{π_2}, respectivamente, las relaciones de equivalencia inducidas. Demuestre que:

$$\pi_1 \text{ es más fina que } \pi_2 \Longleftrightarrow R_{\pi_1} \subseteq R_{\pi_2}$$

Note que esto indica que, para cualquier $A \neq \emptyset$, los CPO's $<\text{REQ}, \subseteq>$ y $<$ PART, "más fina" $>$ de los ejercicios 12 y 20 respectivamente tienen la misma forma.

24. Sea A un conjunto finito con n elementos. Suponga que $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ es una secuencia de particiones de A tal que $\pi_i \neq \pi_{i+1}$ y π_{i+1} es más fina que π_i. ¿ Cuál es la máxima longitud posible de la secuencia ?

25. Considere el CPO $<$ PART, "más fina" $>$ del ejercicio 20. Demuestre, en este CPO, la proposición análoga a la demostrada en el ejercicio 12 para el CPO $<\text{REQ}, \subseteq>$, es decir:

Si $B = \text{PART} - \{\ \{A\}\ \}$ y $\pi \in B$ cumple la propiedad:

$$\exists S, T \in \pi(\ S \neq T \wedge \forall z \in A(z \in S \vee z \in T)\ )$$

entonces R es maximal de B.

Note que la propiedad que cumple π quiere decir que π tiene dos elementos o bloques (S y T).

Capítulo 8

Funciones

Definiciones

- La relación f es una *función* $\iff$

$$< x, y > \in f \wedge < x, z > \in f \Rightarrow y = z$$

- Si $< x, y > \in f$ (i.e. $\mathrm{Img}_f(\{x\}) = \{y\}$) :

$$f(x) = y$$

  Si $x \notin \mathrm{Dop}(f)$ (i.e. $\mathrm{Img}_f(\{x\}) = \emptyset$) : $f(x)$ *no* está definida.

- Si A es un conjunto:

$$f(A) = \mathrm{Img}_f(A) = \{y \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$$
$$f^{-1}(A) = \mathrm{PreImg}_f(A) = \{x \mid f(x) \in A\}$$

- f es *parcial* en $A \iff \mathrm{Dop}(f) \subseteq A$
- f es *total* en $A \iff \mathrm{Dop}(f) = A$
- $f : A \to B \iff f$ es de A en B y total (en A)
- $f = g \iff Dop(f) = Dop(g) \wedge \forall x \in Dop(f)\,(f(x) = g(x))$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- Si $f : A \to A$:

$$\begin{cases} f^0(a) = a \\ f^{n+1}(a) = f(f^n(a)), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- $1_A = Id_A$
- $f\mid_A = f\mid_{izq} A$

- $B^A = \{f \mid f : A \to B\}$
- f de A en B es *sobreyectiva* (en B) $\iff B \subseteq Rg(f)$, es decir:

$$\forall y \in B\, (\exists x \in A : f(x) = y)$$

- f es *inyectiva* $\iff$

$$\forall x, y \in \mathrm{Dop}(f)\, (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

- f es *biyectiva* $\iff$ f es inyectiva y sobreyectiva
- Sea A un conjunto. Para todo conjunto $A' \subseteq A$, la *función característica* de A', de A en $\{0, 1\}$, denotada por $\chi_{A'}$ se define como:

$$\chi_{A'}(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A' \\ 0 & \text{si } a \notin A' \end{cases}$$

Ejercicios

1. Determine cuáles de las siguientes relaciones de $A = \{a, b, c\}$ en $B = \{0, 1, 2\}$ son funciones:

   - $\{< a, 0 >, < b, 0 >, < c, 0 >\}$
   - $\{< a, 0 >\}$
   - $\{< a, 0 >, < b, 0 >, < c, 1 >, < b, 2 >\}$
   - $\{< a, 0 >, < b, 1 >\}$
   - $\{< a, 0 >, < b, 1 >, < c, 2 >\}$
   - $\{< a, 1 >, < b, 2 >, < c, 1 >\}$

   Para ellas:

   (a) Encuentre la imagen de los conjuntos $\{a, b\}, \{a, c\}$, y $\{b, c\}$.

   (b) Determine si es parcial y/o total en A.

   (c) Determine si es inyectiva y/o sobreyectiva.

2. Determine cuáles de las siguientes relaciones son funciones. Para éstas, determine si son inyectivas y/o sobreyectivas.

   (a) La relación f sobre el conjunto $K = \{1, 2, \ldots, k\}$ de enteros positivos menores o iguales a K tal que:

$$\forall i \in K : \mathrm{Img}_f(\{i\}) \supseteq \begin{cases} \{i + 1\} & \text{si } 1 \leq i < k \\ \{1\} & \text{si } i = k \end{cases}$$

(b) La relación f de $\mathbb{N}$ en $\{0,1,2,3\}$ tal que:

$$\forall i \in \mathbb{N} : \mathrm{Img}_f(\{i\}) \supseteq \begin{cases} \{0\} & \text{si } i \text{ es divisible por } 3 \\ \{1\} & \text{si } i \text{ es divisible por } 7 \\ \{2\} & \text{si } i \text{ es divisible por } 21 \\ \{3\} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

3. Para cada una de las siguientes funciones f y conjuntos S:

   - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
     $f(n) =< n, n+1 >$
     $S = \{< 2, 2 >\}$
   - $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
     $f(x) =| x |$
     $S = \{1, 0\}$
   - $f : \{a,b\}^* \to \{a,b\}^*$
     $f(x) = xa$
     $S = \{\lambda, b, ba\}$
   - $f : [0,1] \to [0,1]$
     $f(x) = x/2 + 1/4$
     $S = [0, 1/2]$
   - $f : (0,1) \to (0,\infty)$
     $f(x) = 1/x$
     $S = (0,1)$

   determine:

   (a) Si la función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

   (b) La imagen de la función, i.e, $f(\mathrm{Dom(f)})$.

   (c) La pre-imagen del conjunto S, i.e., $f^{-1}(S)$.

   (d) Una expresión para f^{-1}, si f^{-1} es función.

4. Demuestre que si $f : A \to B$ y $A1 \subseteq A2 \subseteq A$ entonces $f(A1) \subseteq f(A2)$.

5. Sea $A = \{0,1,2\}$. Encuentre todas las funciones f en A^A. ¿ Cuáles de ellas cumplen cada una de las siguientes propiedades ?

   (a) $f^2(x) = f(x)$

   (b) $f^2(x) = x$

   (c) $f^3(x) = x$

6. Demuestre que:

   (a) f es función inyectiva de A en $B \iff f^{-1}$ es función inyectiva de B en A

   (b) $f : A \to B$ es biyectiva $\iff f^{-1} : B \to A$ es biyectiva.

7. Sea $f : A \to B$. Demuestre que:
   (a) f es inyectiva $\iff f^{-1} \circ f = Id_A$.
   (b) f es sobreyectiva $\iff f \circ f^{-1} = Id_B$.

8. ¿ Bajo cuáles condiciones la función longitud de Σ^* en $\mathbb{N}$ es una biyección ?.

9. Pruebe que si $f \in A^A$ y f es inyectiva (sobreyectiva, biyectiva) entonces f^n es también inyectiva (sobreyectiva, biyectiva) para todo $n \in \mathbb{N}$.

10. Sean A y B conjuntos finitos. Suponga que A tiene m elementos y B tiene n elementos.
    - Establezca la relación que debe existir entre m y n para hacer verdaderas las siguientes proposiciones:
      (a) Existe una inyección total de A en B.
      (b) Existe una sobreyección de A en B.
      (c) Existe una biyección total de A en B.
    - ¿Cuál es el número máximo de elementos que $f \subseteq A \times B$ puede tener, siendo f una función?.

11. Encuentre una inyección de A en $\mathsf{P}(A)$.

12. Sea $f : A \to B, B' \subseteq B, A' \subseteq A$.
    - Demuestre que:
      (a) $f(f^{-1}(B')) \subseteq B'$.
      (b) Si f es sobreyectiva entonces $f(f^{-1}(B')) = B'$.
      (c) $A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$.
      (d) Si f es inyectiva entonces $f^{-1}(f(A')) = A'$.
    - Pruebe que la totalidad de f no se necesita para las proposiciones (b) y (d) anteriores. Para ello dé como contraejemplos una función sobreyectiva y una inyectiva pero no totales que cumplan (b) y (d) respectivamente.
    - Pruebe que la sobreyectividad de f se necesita para la proposición en (b), mediante un contraejemplo con una función total y no sobreyectiva.
    - Pruebe que la inyectividad de f se necesita para la proposición en (d), mediante un contraejemplo con una función total y no inyectiva.

13. Sea $f : A \to B$ sobreyectiva. ¿ Existe $A' \subseteq A$ tal que $f\mid_{A'}: A' \to B$ es una biyección ?.

14. Pruebe que si $f : A \to B$ es inyectiva, existen $B' \subseteq B$ y $g \subseteq f$, $g : A \to B'$ tal que g es biyectiva.

15. Verifique las siguientes proposiciones para la función característica de subconjuntos A y B del conjunto C.

    (a) $\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x)[1 - \chi_B(x)]$
    (b) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$
    (c) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$

16. Demuestre que si f y g son funciones entonces $f \circ g$ es función.

17. Demuestre que si f y g son funciones entonces $f \cap g$ es función.

18. Demuestre que si f y g son funciones inyectivas entonces $f \cap g$ es función inyectiva.

19. Sean f y g funciones inyectivas. Demuestre que son falsas las proposiciones:

    (a) $Dop(f) \cap Dop(g) = \emptyset \Rightarrow f \cup g$ es función inyectiva.
    (b) $Rg(f) \cap Rg(g) = \emptyset \Rightarrow f \cup g$ es función inyectiva.

    y que es cierta:

    $$Dop(f) \cap Dop(g) = \emptyset \wedge Rg(f) \cap Rg(g) = \emptyset \Rightarrow f \cup g \text{ es función inyectiva}$$

20. Dadas $f : B \to C$ y $g : A \to B$, demuestre que:

    (a) f yg son inyectivas $\Rightarrow f \circ g$ es inyectiva.
    (b) f yg son sobreyectivas $\Rightarrow f \circ g$ es sobreyectiva.

21. ¿ Cuáles de las siguientes funciones son inyectivas y cuáles son sobreyectivas ?

    (a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = x^2$.
    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$.
    (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$.

22. Sean A y B conjuntos no vacíos y FAB el conjunto de todas las funciones de A en B, es decir:
    $$\text{FAB} = \{f \mid f \subseteq A \times B \,\wedge\, f \text{ es función}\}$$
    Considere el CPO $<\text{FAB}, \subseteq>$.

    (a) Demuestre que si $f, g \in$ FAB son funciones totales entonces $f \not\subseteq g$, es decir, son incomparables.
    (b) ¿ Quiénes son los maximales de FAB ?. Demuéstrelo.
    (c) Note que $\emptyset$ es el mínimo de FAB. Caracterice los sucesores inmediatos de $\emptyset$, es decir, los $f \in$ FAB tales que $\nexists g \in$ FAB $: \emptyset \subseteq g \subseteq f$.

23. (a) Sea $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subseteq \mathbb{N}$. Halle una función inyectiva $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$. ¿ Sigue siendo f inyectiva si se incluye el cero (0) en Σ ?.

(b) Generalice este resultado hallando una función $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ inyectiva para $\Sigma = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ con $n \geq 2$.

(c) Si se tiene ahora $\Sigma = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, con $n \geq 2$, halle $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ inyectiva.

24. Sea A un conjunto no vacío y $f : A \to A$. Se define la *relación de equivalencia inducida por* f sobre A, $\sim_f$, por:

$$\forall x, y \in A\,(x \sim_f y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)\,)$$

- Pruebe que $\sim_f$ es efectivamente una relación de equivalencia en A.

Suponga ahora que f es inyectiva.

- Pruebe que $\forall C \in A/\!\sim_f : C$ es unitario.

Sea S una relación de orden parcial sobre A. Se define la relación R sobre el conjunto cociente de $\sim_f$ ($A/\!\sim_f$) como:

$$R = \{< C_1, C_2 >|\, C_1, C_2 \in A/\!\sim_f\ \wedge \exists x \in C_1,\, y \in C_2\,(< x, y > \in S)\}$$

- Pruebe que R es un orden parcial sobre $A/\!\sim_f$

25. Sea $f : A \to B$. Demuestre que:

$$f \text{ es sobreyectiva}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall g : B \to C\, \forall h : B \to C(\ g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h\ )$$

26. Sea $f : B \to C$. Demuestre que:

$$f \text{ es inyectiva}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall g : A \to B\, \forall h : A \to B(\ f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h\ )$$

Capítulo 9

Conjuntos Infinitos. Cardinalidad

Definiciones

- A es (naturalmente) *finito* y $|A| = n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow$

$$\exists f (f : n \rightarrow A \wedge f \text{ es biyectiva})$$

  A es (naturalmente) *infinito* si no es finito.

- A es (Dedekind) *infinito* $\Longleftrightarrow$

$$\exists f (f : A \rightarrow A \wedge f \text{ es inyectiva} \wedge f(A) \subset A)$$

  A es (Dedekind) *finito* si no es infinito.

- $|A| = \aleph_o \Longleftrightarrow \exists f\ (f : \mathbb{N} \rightarrow A \wedge f$ es biyectiva$)$
- $|A| = \mathfrak{c} \Longleftrightarrow \exists f\ (f : [0,1] \rightarrow A \wedge f$ es biyectiva$)$
- A es *contable* $\Longleftrightarrow$ A es finito o $|A| = \aleph_0$.
- f es una *enumeración* de $A \Longleftrightarrow f$ es sobreyectiva (en A) y

$$f : \mathbb{N} \rightarrow A \vee \exists n \in \mathbb{N}\, (f : n \rightarrow A)$$

  Si f es inyectiva es *sin repeticiones*, si no, es *con repeticiones*.

- A es *numerable* $\Longleftrightarrow \exists f (f$ es una enumeración de $A)$
- $|A| = |B| \Longleftrightarrow \exists f\ (f : A \rightarrow B \wedge f$ es biyectiva$)$
- $|A| \preceq |B| \Longleftrightarrow \exists f\ (f : A \rightarrow B \wedge f$ es inyectiva$)$
  Esta relación es de orden total.
- $AeqB($ A es equipotente a $B) \Longleftrightarrow |A| = |B|$

Ejercicios

1. Para cada uno de los siguientes conjuntos, determine si son finitos o infinitos:
   (a) Las palabras en $\{a, b\}^*$ de longitud prima.
   (b) Las palabras en $\{a, b, c\}^*$ de longitud no mayor que k.
   (c) Los programas en PASCAL con cuatro instrucciones.
   (d) $\mathbb{Z}^{\{0,1\}}$
   (e) Las matrices $m \times n$ con elementos en $\{0, 1, \ldots, k\}$.
2. Sea $f : A \to B$ una inyección y A infinito. Pruebe que B es infinito.
3. Demuestre que los siguientes conjuntos son finitos:
   (a) B, si $B \subseteq A$ y A es finito.
   (b) $A \cap B$, si A es finito.
   (c) $A - B$, si A es finito.
4. Pruebe que el conjunto de todos los programas en PASCAL que no terminan es infinito.
5. Pruebe que la intersección de dos conjuntos infinitos no es necesariamente infinita.
6. Pruebe que si F es una familia finita y $\forall A \in F (A \text{ es finito})$ entonces $\bigcup F$ es finito.
7. Pruebe que $\mathsf{P}(A)$ es finito si y sólo si A es finito.
8. Pruebe que: A es un conjunto infinito $\Longleftrightarrow \forall x \in A\ (|A| = |A - \{x\}|)$.
9. Demuestre que el conjunto de los números pares y el conjunto de los números impares son numerables.
10. Demuestre que:
    (a) Si $B \subseteq A$, A es infinito y B es finito entonces $A - B$ es infinito.
    (b) Si $B \subseteq A$ y A es numerable entonces $A - B$ es numerable.
    (c) Si A es numerable entonces A tiene un subconjunto B numerable tal que $A - B$ es numerable.
11. Si A es numerable y B es numerable, cómo se pueden numerar:
    (a) $A \cup B$
    (b) $A \times B$
12. Sea F una familia. Demuestre la veracidad o falsedad de la siguiente proposición:

$$|F| = \mathfrak{c} \ \wedge \ \forall A \in F (A \text{ es finito}) \ \Rightarrow \ \bigcup F \text{ es contable}$$

13. Pruebe que el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ es numerable. Posteriormente pruebe que el conjunto de todos los subconjuntos finitos de un conjunto numerable es numerable.

14. Pruebe que si A es numerable, $A^n = \{< x_1, x_2, \ldots, x_n >| \; x_i \in \mathrm{A}\}$ es numerable.

15. Pruebe que si $\Sigma \neq \emptyset$ es un alfabeto finito, entonces Σ^* es infinito numerable. Pruebe además que $\mathsf{P}(\Sigma^*)$ es infinito pero no numerable.

16. Pruebe que $[0, 1]$ no es numerable.

17. Demuestre que el conjunto de los números pares es equipotente al conjunto de los números impares.

18. Demuestre que:

    (a) $\{A\} \, eq \, 1$
    (b) $(A \times \{x\}) \, eq \, A$
    (c) $\mathrm{suc}(\mathbb{N}) \, eq \, \mathbb{N}$ (Recuerde que "suc" está definido para cualquier conjunto)
    (d) $(A \times B) \, eq \, (B \times A)$
    (e) $(A \times (B \times C)) \, eq \, ((A \times B) \times C)$
    (f) $(A \, eq \, B) \wedge (C \, eq \, D) \wedge (A \cap C = \emptyset) \wedge (B \cap D = \emptyset) \Rightarrow (A \cup C) \, eq \, (B \cup D)$
    (g) $A \, eq \, B \wedge C \, eq \, D \Rightarrow (A \times C) \, eq \, (B \times D)$
    (h) $(A \, eq \, B) \wedge (C \, eq \, D) \Rightarrow A^C \, eq \, B^D$
    (i) $B \cap C = \emptyset \Rightarrow A^{B \cup C} \, eq \, (A^B \times A^C)$
    (j) $A^C \times B^C \, eq \, (A \times B)^C$
    (k) $(A^B)^C \, eq \, A^{B \times C}$
    (l) $\mathsf{P}(A) \, eq \, 2^A$
    (m) $|B| = n \;\Rightarrow\; A^B \, eq \, A^n = \{< x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} >| \; x_i \in A\}$

19. Pruebe que un número natural no es equipotente con un subconjunto propio de él mismo. Concluya que si $|A| = m$ y $n > m$ entonces $|A| \neq n$.

20. Demuestre que, efectivamente, la relación $\preceq$ es reflexiva y transitiva, es decir:

    (a) $|A| \preceq |A|$
    (b) $|A| \preceq |B| \wedge |B| \preceq |C| \Rightarrow |A| \preceq |C|$

21. Pruebe que si existe una sobreyección de A en B, entonces $|B| \preceq |A|$.

22. ¿ Es cierto que si $A \in B$, $|A| \preceq |B|$?

23. Demuestre que: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$

24. Demuestre que si A es finito: $|A \cap B| = |A| \iff A \subseteq B$. Dé un contraejemplo para el caso A infinito.

25. Demuestre que:

    (a) $|A| \preceq |B| \iff \exists C\ (|A| = |C| \wedge C \subseteq B)$
    (b) $A \subseteq B \Rightarrow |A| \preceq |B|$
    (c) $|A| \preceq |A \cup B|$

26. Si A es un conjunto finito demuestre que:

$$\forall B (B \subset A \Rightarrow \mid B \mid \prec \mid A \mid)$$

27. Dados dos conjuntos A, B finitos, verifique que:

    (a) $\exists p \in \mathbb{N} : |A \cup B| = p$
    (b) $\exists p \in \mathbb{N} : |A \cap B| = p$
    (c) $\exists p \in \mathbb{N} : |A \times B| = p$

28. Demuestre que: $|A \cap B| \preceq |A \cup B|$.

29. Sean A y B conjuntos finitos disjuntos. Pruebe que si $|A| = m$ y $|B| = n$ entonces $|A \cup B| = m + n$.

30. Sean A y B conjuntos finitos. Use inducción para probar que si $|A| = m$ y $|B| = n$ entonces $|A \cup B| = m + n - |A \cap B|$.

31. Joe Cool, un estudiante del "Silo Institute of Technology", ha sugerido la siguiente prueba de que no existe ninguna biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

    Suponga que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es biyectiva, con $f(k) = i_k$. Para cada i_k, construya un número en [0,1] invirtiendo los dígitos de i_k y colocando un punto decimal a la izquierda. Por ejemplo, si $i_k = 123$, el número construido es .321000...
    Esto define una función inyectiva $g : \mathbb{N} \to [0, 1]$, tal que, por ejemplo, $g(123) = .321000\ldots$ Aplique la técnica de diagonalización de Cantor a la lista

$$\begin{array}{rcl} g \circ f(0) & = & .x_{00}x_{01}x_{02}\ldots \\ g \circ f(1) & = & .x_{10}x_{11}x_{12}\ldots \\ & \vdots & \end{array}$$

    para construir el número $y \in [0, 1]$. Ahora invierta los dígitos de y y coloque el punto decimal a la derecha. El resultado es un número que no aparece en la lista $f(0), f(1), \ldots,$ lo que contradice la suposición de que f es sobreyectiva (por ser biyectiva).
    Por reducción al absurdo, no existe ninguna biyección de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

¿ Cuál es el error de esta argumentación ?

32. Demuestre que si A es un conjunto infinito y B es numerable, entonces $|A| = |A \cup B|$. Pruebe que esta proposición es falsa si B no es numerable.

33. Demuestre que $|[0,1]| = |(0,1)|$.

34. Pruebe que $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

35. Pruebe que si A es finito y B es infinito: $|A| \prec \aleph_0 \preceq |B|$.

36. Pruebe que $|A| \prec |\mathsf{P}(A)|$.

37. Sean π_1 y π_2 particiones de A tal que π_1 es más fina que π_2. Demuestre que $|\pi_2| \preceq |\pi_1|$.

38. Trate de encontrar un conjunto S tal que $|\mathsf{P}(S)| = \aleph_0$, describa las dificultades que encuentre.

39. Pruebe que $|\mathsf{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$.

40. Pruebe que $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$. Posteriormente pruebe que la cardinalidad de los programas en PASCAL es estrictamente menor que la de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. ¿ Qué implicaciones tiene este resultado en el área de Computación ?.

Capítulo 10

Algebras

Definiciones

- f es una *operación n-aria* sobre $A \Longleftrightarrow f : A^n \to A$
  ($A^n = A \times A \times \ldots \times A, n$ veces)

  Si $n = 1$, f es *unaria*. Si $n = 2$, f es *binaria* y normalmente se utiliza en notación infija.

- Si $\odot$ es una operación binaria sobre A:

  $1_i \in A$ es una *identidad izquierda* o un *neutro izquierdo* de $\odot \Longleftrightarrow$

  $$\forall x \in A : 1_i \odot x = x$$

  $1_d \in A$ es una *identidad derecha* o un *neutro derecho* de $\odot \Longleftrightarrow$

  $$\forall x \in A : x \odot 1_d = x$$

  $1 \in A$ es una *identidad* o un *neutro* de $\odot \Longleftrightarrow$

  $$\forall x \in A : x \odot 1 = 1 \odot x = x$$

- Si $\odot$ es una operación binaria sobre A:

  $0_i \in A$ es un *cero izquierdo* o un *absorbente izquierdo* de $\odot \Longleftrightarrow$

  $$\forall x \in A : 0_i \odot x = 0_i$$

  $0_d \in A$ es un *cero derecho* o un *absorbente derecho* de $\odot \Longleftrightarrow$

  $$\forall x \in A : x \odot 0_d = 0_d$$

  $0 \in A$ es un *cero* o un *absorbente* de $\odot \Longleftrightarrow$

  $$\forall x \in A : x \odot 0 = 0 \odot x = 0$$

- Si $\odot$ es una operación binaria sobre A con neutro 1, y $x \in A$:

  $y \in A$ es una *inversa izquierda* de x (con respecto a $\odot$) $\Longleftrightarrow$

  $$\forall x \in A : y \odot x = 1$$

  $y \in A$ es una *inversa derecha* de x (con respecto a $\odot$) $\Longleftrightarrow$

  $$\forall x \in A : x \odot y = 1$$

  $y \in A$ es una *inversa* de x (con respecto a $\odot$) $\Longleftrightarrow$

  $$\forall x \in A : x \odot y = y \odot x = 1$$

- $B \subseteq A$ es *cerrado* respecto a $f : A^n \to A \Longleftrightarrow f(B^n) \subseteq B$, es decir:

  $$\forall x_1, \ldots, x_n \in B : f(x_1, \ldots, x_n) \in B$$

- $< A, f_1, f_2, \ldots, k_1, k_2, \ldots >$ es un *álgebra* $\Longleftrightarrow$ $f_1, f_2, \ldots$ son operaciones sobre A y $k_1, k_2, \ldots$ son elementos de A.

  A es llamado el *portador* o *soporte* del álgebra. $k_1, k_2, \ldots$ son llamados *elementos distinguidos* o *constantes*. $f_1, f_2, \ldots, k_1, k_2, \ldots$ junto con las aridades de las operaciones es llamada la *firma* del álgebra.

- El álgebra $< B, g_1, g_2, \ldots, g_n, k'_1, k'_2, \ldots, k'_m >$ es una *subálgebra* del álgebra $< A, f_1, f_2, \ldots, f_n, k_1, k_2 \ldots, k_m > \Longleftrightarrow$

  1. $B \subseteq A$
  2. $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : g_i = f_i \mid B$
  3. $\forall i \in \{1, \ldots, m\} : k'_i = k_i$

- Un álgebra $< S, \circ >$ es un *semigrupo* si $\circ$ es una operación binaria asociativa.

- Un álgebra $< S, \circ, 1 >$ es un *monoide* si $< S, \circ >$ es un semigrupo y 1 es un neutro para $\circ$.

- Un álgebra $< S, \circ, \Delta, 1 >$ es un *grupo* si $< S, \circ, 1 >$ es un monoide y Δ es una operación unaria tal que si $x \in S$, Δx es una inversa de x para $\circ$.

- $h : A \to B$ *preserva* $f : A^n \to A$ en $g : B^n \to B \Longleftrightarrow$

  $$\forall a_1, \ldots, a_n \in A \ : \ h(f(a_1, \ldots, a_n)) = g(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

- $h : A \to B$ es un *homomorfismo* de $< A, f_1, f_2, \ldots, f_n, k_1, k_2 \ldots, k_m >$ a $< B, g_1, g_2, \ldots, g_n, k'_1, k'_2, \ldots, k'_m >$ (ambas álgebras) $\Longleftrightarrow$

  1. $\forall i \in \{1, \ldots, n\} :$ h preserva f_i en g_i
  2. $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : h(k_i) = k'_i$

- Un homomorfismo h del álgebra $< A, f_1, f_2, \ldots, f_n, k_1, k_2 \ldots, k_m >$ al álgebra $< B, g_1, g_2, \ldots, g_n, k'_1, k'_2, \ldots, k'_m >$ es un *isomorfismo* si es biyectivo. Estas álgebras se dicen *isomorfas*.

Ejercicios

1. Encuentre ejemplos de álgebras con portador no vacío con una operación binaria que tenga las propiedades listadas a continuación.
   (a) Existencia del elemento neutro.
   (b) Existencia del elemento absorbente.
   (c) Existencia de los elementos neutro y absorbente.
   (d) La operación no es conmutativa.
   (e) La operación no es asociativa.
   (f) Existencia de un cero izquierdo el cual no es cero derecho.
   (g) Existencia de neutro derecho el cual no es neutro izquierdo.

2. Sea $\star$ una operación binaria sobre A. Pruebe que:
   (a) Una identidad es única.
   (b) Un cero es único.
   (c) Si $\star$ es asociativa y $x \in A$ tiene inversas izquierda y derecha, entonces las inversas son iguales.

3. Tome $\mathbb{Z}$ como universo. Considere las siguientes operaciones:
   - $+$
   - $*$
   - $-$
   - $\mid x - y \mid$ (valor absoluto)
   - Max
   - Min
   - $\mid x \mid$ (valor absoluto)

   Determine las operaciones para las cuales cada conjunto dado a continuación es cerrado :
   (a) $\mathbb{Z}$
   (b) $\mathbb{N}$
   (c) $\{x \mid 0 \leq x \leq 10\}$
   (d) $\{x \mid -5 \leq x \leq 5\}$
   (e) $\{x \mid -10 \leq x \leq 0\}$
   (f) $\{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$

4. Tome $\mathbb{R}$ como universo. Considere las siguientes propiedades:

- Asociatividad.
- Conmutatividad.
- Existencia de elemento neutro.
- Exitencia de elemento absorbente.

Determine para cada una de las operaciones binarias dadas a continuación, las propiedades que cumple.

(a) $+$

(b) $-$

(c) $*$

(d) Max

(e) Min

(f) $\mid x - y \mid$

5. Tome $S_k = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq k\}$. Muestre que $< S_k, + >$ es un subsemigrupo de $< \mathbb{Z}, + >$.

6. Considere cada uno de los conjuntos y operaciones siguientes y determine si pueden formar un semigrupo, monoide o grupo:

   (a) Σ^* con la operación de concatenación.

   (b) A^B con la composición de funciones.

   (c) $\{f \in A^B \mid f \text{ es biyectiva}\}$ con la composición.

   (d) $\mathsf{P}(A)$ con la unión de conjuntos.

   (e) $\mathsf{P}(A)$ con la intersección de conjuntos.

   (f) $\{2^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ con la multiplicación.

7. Dadas las siguientes relaciones:

   (a) $R = \{< a, a >, < b, b >\}$

   (b) $R = \{< a, a >, < b, b >, < a, b >, < b, a >\}$

   (c) $R = \{< a, b >, < b, a >, < c, b >\}$

   (d) $R = \{< a, b >, < b, c >, < c, d >, < d, a >\}$

   (e) $R = \{< a, b >, < b, a >, < a, c >, < c, d >\}$

   Sea $S = \{R^n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ el soporte de un álgebra en la cual la secuenciación de relaciones es la operación binaria. En cada caso, determine si el álgebra puede ser un semigrupo, un monoide o un grupo. Determine la cardinalidad del soporte.

8. (a) Halle condiciones necesarias y suficientes sobre la relación R para que el conjunto $\{R^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ pueda ser el soporte de un monoide con la operación de secuenciación.

(b) Halle condiciones necesarias y suficientes sobre la relación R para que el conjunto $\{R^n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ pueda ser el soporte de un monoide con la operación de secuenciación.

(c) Halle condiciones necesarias y suficientes sobre la relación R para que el conjunto $\{R^n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ pueda ser el soporte de un grupo con la operación de secuenciación.

9. Muestre que toda subálgebra de un monoide es un monoide y que toda subálgebra de un grupo es un grupo.

10. Muestre que si θ es una operación binaria sobre T y 0 es elemento absorbente con respecto a θ, entonces T no puede ser portador de un grupo a menos que $T = \{0\}$.

11. Sea $< G, *, -, 1 >$ un grupo y a, b, c elementos de G. Demuestre que cualquiera de las tres ecuaciones siguientes implica las otras dos:

    - $a * b = c$
    - $a = c * (-b)$
    - $b = (-a) * c$

    ¿ Por qué ocurre esto?

12. Sea $< S, \circ, \Delta, k >$ un grupo y $a \in S$, demuestre que:

$$\forall b \in S \ (\exists x \in S : a \circ x = b \ )$$

Más aún, demuestre que el x solución de la ecuación $a \circ x = b$ es único.

13. Sea $< \{e, a, b\}, \circ, \Delta, e >$ un grupo. Rellene la siguiente tabla para la operación $\circ$ de manera que si z aparece en la casilla en la fila asociada a x y columna asociada a y, entonces $z = x \circ y$.

$\circ$	e	a	b
e			
a			
b			

Sugerencia: de la pregunta anterior deduzca propiedades que deben cumplir las filas y/o columnas de la tabla.

14. Sea $< G, *, -, 1 >$ un grupo. Pruebe que $< G, *, -, 1 >$ es abeliano (i.e. * es commutativo en G) si y solo si

$$\forall a, b \in G : \ -(a * b) = (-a) * (-b)$$

15. Sea $< G, \cdot, \Delta, e >$ un grupo y suponga que se define para todo $a \in G$:

$$N(a) = \{x \in G \mid x \cdot a = a \cdot x\}$$

entonces pruebe que $< N(a), \cdot, \Delta, e >$ es un subgrupo de $< G, \cdot, \Delta, e >$

16. Halle homorfismos entre los siguientes pares de álgebras:
    (a) $< \mathbb{Z}, +, 0 >$ y $< \mathbb{Z}, +, 0 >$.
    (b) $< \mathbb{R}, +, 0 >$ y $< \mathbb{R}, *, 1 >$.
    (c) $< \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \leq k\}, + >$ y $< \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq n\}, + >$.

17. Pruebe que si h es un homorfismo del álgebra A en el álgebra B y g lo es de B en C, entonces $g \circ h$ es tambien un homomorfismo (de A en C).

18. Considere el monoide $< \mathsf{P}(C), \cup, \emptyset >$ donde:
    - C es un conjunto finito no vacío.
    - $\cup : \mathsf{P}(C) \times \mathsf{P}(C) \to \mathsf{P}(C)$ es la unión de conjuntos.

    y el monoide $< \text{Bool}^C, \oplus, f_0 >$ donde:
    - $\text{Bool} = \{\text{Verdadero}, \text{Falso}\}$
    - $\oplus : \text{Bool}^C \times \text{Bool}^C \to \text{Bool}^C$ con

    $$\forall x \in C \forall f, g \in \text{Bool}^C \ : \ (f \oplus g)(x) = f(x) \vee g(x)$$

    - $f_0 : C \to \text{Bool}$ con $f_0(x) = \text{Falso}, \forall x \in C$.

    Sea $h \subseteq \mathsf{P}(C) \times \text{Bool}^C$ definida por:

    $$< D, f > \in h \iff f(x) = \begin{cases} \text{Verdadero} & \text{si } x \in D \\ \text{Falso} & \text{si } x \notin D \end{cases}$$

    Pruebe que:
    (a) h es función total.
    (b) h es inyectiva.
    (c) h es sobreyectiva.
    (d) h es un isomorfismo.

19. Sea $a \in \mathbb{Z}$. Se define el conjunto A como:

$$A = \left\{ \frac{a}{i} \mid i \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

y la operación $\odot : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como:

$$x \odot y = \frac{x \cdot y}{a}$$

donde $\cdot$ y — son las operaciones usuales de multiplicación y división (en los reales) respectivamente.

(a) Demuestre que A es cerrado respecto a $\odot$.

(b) Halle $e \in A$, neutro de $\odot$ en A.

(c) Halle una biyección $I : \mathbb{N}^+ \to A$ tal que sea un isomorfismo entre los monoides $< \mathbb{N}^+, \cdot, 1 >$ y $< A, \odot, e >$. Demuestre que es isomorfismo.

20. Sea h un homomorfismo del álgebra A con portador S en el álgebra B. $h(S)$ con la misma firma de B es llamada la *imagen homomórfica de* A bajo h. Pruebe que esta imagen es subálgebra de B. Más aún, pruebe que si A es un semigrupo (monoide, grupo), su imagen homomórfica es tambien un semigrupo (monoide, grupo).

21. (a) Muestre que dos álgebras no pueden ser isomorfas si sus soportes tienen distintas cardinalidades.

    (b) Dé un ejemplo de dos álgebras con la misma firma, i.e. con el mismo número de operaciones de la misma aridad y el mismo número de elementos distinguidos, pero que no sean isomorfas aún cuando sus portadores tengan la misma cardinalidad.

22. Sea h un homomorfismo del álgebra $< A, \odot >$ al álgebra $< B, \otimes >$, donde $\odot$ y $\otimes$ son operaciones binarias. Demuestre que:

    (a) Si $\odot$ tiene identidad en A, $\otimes$ tiene identidad en la subálgebra $< h(A), \otimes >$.

    (b) Una identidad en $< h(A), \otimes >$ puede no ser identidad en $< B, \otimes >$.

    (c) Si $\odot$ tiene cero 0 en A, $\otimes$ tiene cero $0'$en la subálgebra $< h(A), \otimes >$ y $h(0) = 0'$.

    (d) Un cero en $< h(A), \otimes >$ puede no ser cero en $< B, \otimes >$.

23. Sea $h : S \to S'$ un homomorfismo de $A =< S, \circ, k >$ en el álgebra $A' =< S', \circ', k' >$. Pruebe que si $< T, \circ', k' >$ es subálgebra de A', entonces $< h^{-1}(T), \circ, k >$ es una subálgebra de A.

24. Se tiene un homomorfismo h del monoide $< \mathbb{N}, +, 0 >$ en el monoide $< \mathbb{N}^+, *, 1 >$. Se sabe que $h(1) = 3$. Encuentre la función $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$, es decir, halle una expresión genérica para $h(x)$. ¿ Es h un isomorfismo ?.

25. Sea Σ un alfabeto finito. Considere $< \Sigma, \text{concatenación}, \lambda >$. Este es llamado el *monoide libre generado por* Σ. El monoide libre tiene la siguiente propiedad importante:

    > Sea $< S, \circ, 1 >$ un monoide arbitrario. Para cualquier $h : \Sigma \to S$, existe una única extensión de h a un homomorfismo $h^* : \Sigma^* \to S$.

    Pruebe esta propiedad.

Referencias

[1] Jorge Baralt. FEDRA: Un ambiente Funcional para las Estructuras Discretas y una Representación para su Automatización. Dpto. de Computación y Tecnología de la Información, Universidad Simón Bolívar, Octubre 1989.

[2] Donald F. Stanat y David F. McAllister. *Discrete Mathematics in Computer Science.* Prentice–Hall Inc., 1977.