CI 2522 Estructuras Discretas II **Abr-Jul 2009**

Problemario 2: Semana 5

Problemas de Grupos, Clases Laterales, Grupos Ciclicos.

1. Demuestre que un grupo $(G, \oplus, \sim, e)$ es conmutativo si para todo $g \in G$ se cumple $g^2 = e$. De un contraejemplo para el reciproco.
2. Demuestre que $(G, *, \sim, e)$ es un grupo abeliano sii para todo $a, b \in G$ se cumple $\sim (a * b) = (\sim a) * (\sim b)$.
3. Sea $(G, \oplus, \sim, e)$ un grupo abeliano. Sea $z \in G$ un elemento cualquiera. Se define la operación binaria $\oplus_z$ como $a \oplus_z b = a \oplus b \oplus (\sim z)$. Demuestre que
   a) G con la operacion $\oplus_z$ es un grupo. Nota: debe encontrar el neutro y el inverso
   b) La funcion $h(x) = x \oplus z$ es un automorfismo de G en G.
4. Sean $(G, \oplus, \sim, e)$ y $(G', \oplus', \sim', e')$ dos grupos. Sea $f : G \to G'$ una funcion tal que $f(a \oplus b) = a \oplus' b$ con a, b cualesquiera. Demuestre que f es un homomorfismo de G en G'.
5. Sea $(G, \oplus, \sim, e)$ un grupo, sean $a, b \in G$. Si $a^n = b^n$ y $a^m = b^m$ con $\text{mcd}(m, n) = 1$. Demuestre que $a = b$.
6. Sea $(G, \oplus, \sim, e)$ un grupo tal que $|G| = p$ primo. Demuestre que $\exists a \in G$ y $a \neq e$ tal que $G = \{a^k | k \in \mathbb{N}\}$.
7. Sea $(G, \oplus, \sim, e)$ un grupo. Sea H un subgrupo de G. Demuestre que $\forall a \in G$, $|H \oplus a| = |H|$.
8. Sea $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ el producto cartesiano de los enteros módulo 2 y los enteros módulo 4. Defina el operador binario, el inverso y la identidad para este grupo. Encuentre todos los subgrupos de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. Escriba las clases latera1es derechas del subgrupo ciclico generado por el elemento $(1, 2)$.
9. Sea $(G, \oplus, \sim, e)$ un grupo cíclico con generador b ($b \in G$). Demuestre que $\sim b$ es generador de G.
10. Demuestre que todo grupo cíc1ico es conmutativo.
11. Si $(G, \oplus, \sim, e)$ es un grupo. demuestre que $\forall a, b \in G$ se cumple $(a \oplus b)^{-1} = b^{-1} \oplus a^{-1}$.