

### Problematario 3: Semana 10

Algebras de Boole. Funciones Booleanas. Maxterms-Minterm. Mapas de Karnaugh.

Sea  $B = \langle A, \oplus, \otimes, \sim, \hat{0}, \hat{1} \rangle$  un álgebra de Boole

1. Si  $x \leq y \equiv x \otimes y = x \equiv x \oplus y = y$ . Demuestre para todo  $x, y, z \in A$  que
  - (a)  $x \leq y \longrightarrow x \leq y + z$
  - (b)  $x \leq y \wedge x \leq z \longrightarrow x \leq yz$
2. Muestre que no puede existir un álgebra de Boole con tres elementos.
3. Sean  $A = \{1, 2, 3, \dots, s\}$  y  $B = \{m, n, i, j, l\}$ . Sea  $H = \langle A, R \rangle$  donde  $R$  es la relación:  $aRb, aRc, aRd, bRe, bRf; dRf, dRg; eRh, eRi; fRi, fRj; gRj, gRk; hRl; iRm, iRn; jRm, jRn; kRo; lRp; mRp, mRq; nRq, nRr; pRs, qRs, rRs$ . Halle para  $\langle H, B \rangle$ :
  - (a) Mayorantes (cotas superiores), minorantes, minimales, maximales, máximo, mínimo, supremo e ínfimo.
  - (b) Un subconjunto  $X$  tal que  $H' = \langle X, R' \rangle$  sea reticulado no distributivo y complementado.
4. Sea  $R$  el conjunto de los números reales en el intervalo  $[0, 1]$ .  $\forall a, b \in R$   $a \vee b = \max\{a, b\}$  y  $\forall a, b \in R$   $a \wedge b = \min\{a, b\}$ . Donde  $\sim a = 1 - a$  ¿ Es  $R$  un álgebra de Boole?
5. Sea  $B$  un A.B, sea  $a \in A$  tal que la alt. $a \geq 2$ , entonces  $\exists x, y \in A$  con  $x \neq y$  tal que  $\text{alt}.x < \text{alt}.a$  y  $\text{alt}.y < \text{alt}.a$  y  $a = x \oplus y$ .
6. Sea  $B$  un A.B, sea  $x \in A$  un elemento cualquiera. Si  $a \in \text{AT}(x)$  entonces  $a \preceq x$ .
7. Demuestre que la intersección de dos sub-álgebras de boole es un álgebra de boole.

8. Demuestre que si  $\langle L, \leq \rangle$  es una cadena de altura mayor o igual a tres, no es complementada.

Funciones Booleanas

1. Halle el complemento de cada una de las siguientes funciones:

(a)  $f(x, y, z) = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + xy\bar{z}$

(b)  $f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z + xyz$

(c)  $g(a, b) = \bar{a}b + a\bar{b}$

(d)  $h(a, b) = \bar{a}\bar{b}$

(e)  $g(x, y, z) = (x + y + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y} + z)$

(f)  $h(x, y, z) = (x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + \bar{z})(x + y + z)$

2. Escriba la siguientes funciones como suma de minterms y como producto de maxterms.

(a)  $f(u, v) = (u + v)\overline{(uw + \bar{u}\bar{v})}$

(b)  $g(x, y, z, u) = \overline{(\bar{x}y + xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}u + \bar{u})}$

(c)  $h(x, y, z) = x\bar{y} + xz + xy$

(d)  $f(x, y, z) = (x + \bar{y})(y + \bar{z})(\bar{x} + z)(\bar{x} + \bar{y})$

3. Simplifique las siguientes funciones usando mapas de Karnaugh y dibuje el circuito correspondiente. En cada caso haga el ejercicio usando minterms y maxterms.

(a)  $f(x, y, z) = \bar{x}y + (\bar{x} + xy)z + x(y + \bar{y}z + z)$

(b)  $f(x, y, z, u) = ux + xy + yz + zu + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{u}$

(c)  $f(a, b, c) = (abc)(a + ab + abc)$

(d)  $g(a, b, c) = [a + \overline{(b + c)}]\bar{b} + c[b(a + c) + a(\bar{b} + c)]$

4. Un comité de tres personas necesita un circuito para registrar una votación secreta y mayoritaria. Diseñar un circuito de manera que cada miembro pueda presionar un botón para su voto  $S_i$  y se encienda una lámpara cada vez que la mayoría del comité vote  $S_i$ . No es necesario ningún botón para el voto No.
5. Hallar un circuito que pueda controlar una luz desde dos puntos diferentes.