



Universidad Simón Bolívar  
Departamento de Computación  
y Tecnología de la Información  
Estructuras Discretas III  
CI-2523 Ene-Mar 2002

*Benevolencia para los adúladores.*—Una muestra de la prudencia de los ambiciosos, consiste en ocultar el desprecio que hacia los hombres les inspiran los adúladores.

Aurora, Federico Nietzsche.

### Tarea 3

1. Demuestre que para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ , el máximo valor del coeficiente binomial  $\binom{n}{k}$  se obtiene cuando  $k = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ . Nota:  $\lfloor \alpha \rfloor$  se lee *el piso de  $\alpha$*  y representa al máximo de los enteros menores que  $\alpha$ . Sug.: Pruebe que  $\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k-1}$ .
2. Dado un  $n$ -gono convexo en el cual no hay tres diagonales que se intercepten en un mismo punto hallar cuántos triángulos hay cuyos lados estén sobre diagonales o sobre lados del  $n$ -gono.
3. Probar que si  $x \neq 1$ , entonces

$$\sum_{i=1}^n ix^i = \frac{nx^{n+2} + x - (n+1)x^{n+1}}{(x-1)^2}$$

4. Trate de usar el método de perturbación para evaluar  $\sum_{1 \leq i \leq n} iH_i$ , concluya que:  
 $\sum_{1 \leq i \leq n} H_i = (n+1)H_n - n$  y úselo para hallar la suma original. ( $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ )

5. Demuestre que

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$$

(a) Usando la identidad  $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$  y considerando el coeficiente de  $x^n$  en ambos lados. (b) Aplicando el principio de adición después de reescribir la suma.

6. Dé otra prueba de la identidad

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+m}{m} = \binom{n+m+1}{m}.$$

Sug.: Clasifique subconjuntos adecuados de  $[n+m+1]$  según su máximo

7. ¿Cuántos términos tienen los desarrollos de  $(w+x+y+z)^{10}$  y de  $(w+x+y)^{10}(w+x+y+z)^2$ ?
8. Demuestre combinatoriamente que  $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} S_i(n) i! = k^n$ .